



Universidad  
Carlos III de Madrid

Departamento de Medios Continuos y Teoría de  
Estructuras

INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL: MECÁNICA  
PROYECTO FIN DE CARRERA

# **ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO TERMOELASTOPLÁSTICO DEL PMMA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Autor: Andrés Rubio Llorente

Tutor: Sergio González López

Leganés, Octubre de 2012



**Título:**

**Autor:** Andrés Rubio Llorente

**Tutor:** Sergio González López

## **EL TRIBUNAL**

**Presidente:** \_\_\_\_\_

**Vocal:** \_\_\_\_\_

**Secretario:** \_\_\_\_\_

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día \_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_ en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE





# Agradecimientos

Antes de nada, me gustaría agradecer al departamento de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras por su continua ayuda y buena disposición de los equipos y materiales para el desarrollo de este proyecto.

Especialmente me gustaría dar las gracias a Sergio González por su colaboración y confianza en mí, desde el primer día en el que se inició este proyecto.

Obviamente no puedo olvidarme de aquéllos que me acompañaron durante todo esta dura etapa, y no otros que mi familia, mis padres Teresa e Higinio y mi hermana María Teresa, que han estado ahí tanto en los buenos como en los malos momentos, GRACIAS.

Y también agradecer el apoyo a mis amigos más fieles y que siempre confiaron en mí, Irene, Hugo, Rober, Roci, Toño...

En definitiva, muchas gracias a todos por ayudarme a finalizar con éxito esta andadura en mi vida cuyo final no creí que llegaría nunca.





# Resumen

El presente proyecto “Estudio del comportamiento termoelastoplástico del PMMA mediante el método de los elementos finitos” se centra como su propio nombre indica en el estudio del comportamiento termoelastoplástico de polímeros, en especial en el PMMA o polimetilmetacrilato, utilizando para el estudio el método de los elementos finitos mediante un software comercial denominado Abaqus.

En el proyecto se presenta una introducción a los materiales poliméricos, así como una descripción más profunda del material a emplear, el PMMA. También se introduce de forma breve el software empleado para la realización de los estudios, así como de la herramienta o subrutina empleada dentro del software para el perfeccionamiento y desarrollo del modelo.

Como objetivo adicional a este proyecto, se establece un modelo de plasticidad válido para el PMMA, puesto que los modelos básicos conocidos de plasticidad aplicados a metales no son del todo adecuados. Una vez estudiados varios modelos de la bibliografía, se realiza una serie de simulaciones en la herramienta Abaqus a fin de estudiar su aplicabilidad y la influencia que inciden los distintos parámetros de cada modelo sobre el comportamiento elastoplástico o termoelastoplástico por incidencia de la temperatura del material.

# Palabras clave

Polímeros, Polimetilmetacrilato (PMMA), Abaqus, termoelastoplasticidad, velocidad de deformación.







# Abstract

This project “Study of thermoelastoplasticity behaviour of PMMA by finite element method” focuses as its name implies in studying the thermoelastoplasticity behavior of polymers, especially in the PMMA or polymethylmethacrylate, using a software tool for the study, based on finite element method named Abaqus.

The project presents an introduction to polymer materials and a deeper description of the material that is used, the PMMA. It also briefly introduces the software used to carry out the studies and the tool or software subroutine used within the model to improve it or develop it.

An additional objective of this project is to establish a valid model for PMMA plasticity, since known basic models of plasticity applied to metals are not entirely adequate. Once has been studied various models from the literature, it will conduct a series of simulations in our tool to explore their validity and the influence that different parameters regarding each model affects the elastoplasticity behaviour or thermoelastoplasticity behaviour by temperature influence on the PMMA.

# Keywords

Polymers, Polymethylmethacrylate (PMMA), Abaqus, thermoelastoplasticity, strain rate.





# ***INDICE GENERAL***

<b>1. OBJETIVOS Y CONTENIDO DEL PROYECTO.....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>MOTIVACIÓN.....</i>	<i>2</i>
1.2 <i>OBJETIVOS.....</i>	<i>4</i>
1.3 <i>ESTRUCTURA DEL PROYECTO.....</i>	<i>5</i>
<b>2. INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES POLIMÉRICOS .....</b>	<b>7</b>
2.1 <i>ESTRUCTURA DE LOS POLÍMEROS.....</i>	<i>8</i>
2.2 <i>TIPOS DE MATERIALES POLIMÉRICOS .....</i>	<i>11</i>
2.3 <i>PROCESADO DE LOS POLÍMEROS .....</i>	<i>13</i>
2.4 <i>CARACTERÍSTICAS DE LOS POLÍMEROS.....</i>	<i>14</i>
<b>3. EL POLIMETILMETACRILATO .....</b>	<b>15</b>
3.1 <i>EL POLIMETILMETACRILATO .....</i>	<i>16</i>
3.2 <i>ESTRUCTURA QUÍMICA .....</i>	<i>17</i>
3.3 <i>CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PMMA .....</i>	<i>18</i>
3.4 <i>APLICACIONES DEL PMMA .....</i>	<i>20</i>
3.5 <i>PROPIEDADES DEL PMMA .....</i>	<i>23</i>
<b>4. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>24</b>
4.1 <i>INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....</i>	<i>25</i>
4.1.1 <i>Elementos básicos de los modelos MEF.....</i>	<i>27</i>
4.2 <i>ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....</i>	<i>29</i>
4.3 <i>APLICACIONES DE LAS HERRAMIENTAS MEF .....</i>	<i>31</i>
4.4 <i>VENTAJAS Y LIMITACIONES .....</i>	<i>32</i>
<b>5. ABAQUS .....</b>	<b>33</b>
5.1 <i>GENERACIÓN DE UN PROBLEMA EN ABAQUS .....</i>	<i>34</i>



5.2	ENTORNO DE TRABAJO.....	35
5.2.1	Módulo PART.....	35
5.2.2	Módulo PROPERTY.....	36
5.2.3	Módulo ASSEMBLY.....	37
5.2.4	Módulo STEP.....	37
5.2.5	Módulo INTERACTION.....	37
5.2.6	Módulo LOAD.....	38
5.2.7	Módulo MESH.....	39
5.2.8	Módulo JOB.....	40
5.2.9	Módulo VISUALIZATION.....	40
6.	TEORÍA DE PLASTICIDAD .....	41
6.1	TEORÍA CLÁSICA DE PLASTICIDAD .....	42
6.1.1	Criterio de plastificación para un material isótropo.....	43
6.1.2	Criterio de plastificación de Tresca .....	45
6.1.3	Criterio de plastificación de Von Mises.....	46
6.2	ELECCIÓN DE UNA EXPRESIÓN PARA UN COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO.....	47
6.2.1	Criterio basado en los dos invariantes de tensiones $I_1$ y $J_2$ .....	48
6.2.2	Criterio basado en los tres invariantes de tensiones $I_1$ , $J_2$ y $J_3$ .....	50
7.	SUBROUTINA PARA ABAQUS.....	53
7.1	UTILIDAD DE LA SUBROUTINA .....	54
7.2	ECUACIÓN CONSTITUTIVA DEL PMMA.....	56
7.3	OTRAS ECUACIONES DE IMPORTANCIA .....	57
7.3.1	Tensor de tensiones.....	57
7.3.2	Equivalencia del trabajo plástico .....	58
7.3.3	Balance de energía .....	58



<b>8. DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES .....</b>	<b>59</b>
8.1 <i>ESTUDIO PARAMÉTRICO .....</i>	<i>60</i>
8.2 <i>ESTUDIO DE INFLUENCIA DEL INVARIANTE <math>I_1</math> .....</i>	<i>63</i>
8.3 <i>ESTUDIO DE INFLUENCIA DEL INVARIANTE <math>J_3</math>.....</i>	<i>65</i>
<b>9. RESULTADOS.....</b>	<b>67</b>
9.1. <i>SIMULACIONES CON VON-MISES .....</i>	<i>68</i>
9.1.1 <i>Simulaciones cuasi-estáticas.....</i>	<i>69</i>
9.1.2 <i>Simulaciones dinámicas .....</i>	<i>74</i>
9.2. <i>SIMULACIONES NUEVO CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN .....</i>	<i>80</i>
9.2.1 <i>Estudio paramétrico.....</i>	<i>80</i>
9.2.1.1 <i>Influencia de la temperatura inicial y velocidad de deformación....</i>	<i>81</i>
9.2.1.2 <i>Sensibilidad frente al Coef. Dilatación y al Coef. Taylor-Quinney .</i>	<i>87</i>
9.2.1.3 <i>Influencia del calentamiento de la probeta .....</i>	<i>89</i>
9.2.1.4 <i>Deformación plástica equivalente frente a deformación por                     incremento de T .....</i>	<i>91</i>
9.2.2 <i>Estudio de sensibilidad <math>I_1</math>.....</i>	<i>93</i>
9.2.3 <i>Estudio de sensibilidad <math>J_3</math>.....</i>	<i>100</i>
<b>10. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>106</b>
10.1 <i>CONCLUSIONES.....</i>	<i>107</i>
10.2 <i>PROPUESTA DE MEJORA Y TRABAJOS FUTUROS .....</i>	<i>109</i>
<b>11. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>110</b>
11.1 <i>LIBROS Y PUBLICACIONES .....</i>	<i>111</i>
11.2 <i>RECURSOS ELECTRÓNICOS .....</i>	<i>113</i>



## ***ÍNDICE DE FIGURAS***

<b>Figura 2.1:</b> Macromolécula o cadena polimérica .....	8
<b>Figura 2.2:</b> Tipos de materiales poliméricos .....	8
<b>Figura 2.3:</b> Tipos de configuraciones de los polímeros según la tacticidad.....	9
<b>Figura 2.4:</b> Estructuras amorfa y cristalina de un polímero .....	10
<b>Figura 2.5:</b> Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros termoplásticos .....	11
<b>Figura 2.6:</b> Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros termoestables .....	12
<b>Figura 2.7:</b> Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros elastómeros .....	12
<b>Figura 2.8:</b> Sectores industriales en los que se aplican los polímeros.....	14
<b>Figura 3.1:</b> Formación del PMMA.....	17
<b>Figura 3.2:</b> Estructura del PMMA.....	17
<b>Figura 3.3:</b> Cubierta de piscina climatizada .....	20
<b>Figura 3.4:</b> Barrera protectora de una pista de hielo .....	20
<b>Figura 3.5:</b> Mampara protectora de una escalera automática.....	21
<b>Figura 3.6:</b> Prótesis de odontología y lentes de contacto .....	21
<b>Figura 3.7:</b> Mobiliario de PMMA y letrero luminoso de coche patrulla.....	22
<b>Figura 3.8:</b> Fibra óptica y urnas de PMMA .....	22
<b>Figura 3.9:</b> El cuadro “ <i>Acrylic Elf</i> ” pintado por Pete Halverson por medio de pinturas acrílicas .....	22
<b>Figura 4.1:</b> Discretización en elementos finitos .....	25
<b>Figura 4.2:</b> Sistema “real” y sistema de elementos finitos .....	26
<b>Figura 4.3:</b> Mallado con elemento tipo viga .....	27
<b>Figura 4.4:</b> Mallado con elemento tipo placa .....	28
<b>Figura 4.5:</b> Mallado con elemento tipo sólido .....	28
<b>Figura 4.6:</b> Proceso de obtención de la solución mediante herramientas MEF .....	30

---



<b>Figura 5.1:</b> “Part” de una probeta utilizada en nuestros ensayos .....	35
<b>Figura 5.2:</b> Cuadro de diálogo en el módulo PROPERTY para crear un material .....	36
<b>Figura 5.3:</b> Interacción entre las superficies de dos “parts” .....	37
<b>Figura 5.4:</b> Creando condiciones de contorno sobre el cubo en el módulo LOAD .....	38
<b>Figura 5.5:</b> Mallado de una probeta .....	39
<b>Figura 5.6:</b> Visualización de la tensión de Von Mises en una placa.....	40
<b>Figura 6.1:</b> Definición de los lugares de plastificación según los criterios de Tresca y Von Mises.....	48
<b>Figura 6.2:</b> Comprobación experimental de los modelos propuestos para varios polímeros .....	52
<b>Figura 7.1:</b> Esquema del paso dentro de la subrutina.....	55
<b>Figura 8.1:</b> Simetrías en la probeta cúbica utilizada .....	60
<b>Figura 8.2:</b> Desplazamiento en las probetas en función del tiempo.....	61
<b>Figura 8.3:</b> Modelo de probeta utilizado en las simulaciones para estudiar influencia del invariante $I_1$ .....	63
<b>Figura 8.4:</b> Modelo de probeta utilizado en las simulaciones para estudiar influencia del invariante $J_3$ .....	65
<b>Figura 9.1:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una temperatura de 273K .....	69
<b>Figura 9.2:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una temperatura de 293K .....	70
<b>Figura 9.3:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una temperatura de 323K .....	70
<b>Figura 9.4:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $10^{-1}s^{-1}$ .....	71
<b>Figura 9.5:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $10^{-2}s^{-1}$ .....	72
<b>Figura 9.6:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $10^{-3}s^{-1}$ .....	72

---



<b>Figura 9.7:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 323K.....	74
<b>Figura 9.8:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 293K.....	75
<b>Figura 9.9:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 273K.....	75
<b>Figura 9.10:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 273K con E corregido .....	76
<b>Figura 9.11:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $10\text{s}^{-1}$ .....	77
<b>Figura 9.12:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $100\text{s}^{-1}$ .....	78
<b>Figura 9.13:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $1000\text{s}^{-1}$ .....	78
<b>Figura 9.14:</b> Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de $1000\text{s}^{-1}$ con E corregido ...	79
<b>Figura 9.15:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una $T=300\text{K}$ .....	81
<b>Figura 9.16:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una $T=300\text{K}$ .....	81
<b>Figura 9.17:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una $T=260\text{K}$ .....	82
<b>Figura 9.18:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una $T=260\text{K}$ .....	82
<b>Figura 9.19:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una $T=330\text{K}$ .....	82
<b>Figura 9.20:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una $T=330\text{K}$ .....	83
<b>Figura 9.21:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una $T=350\text{K}$ .....	83
<b>Figura 9.22:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una $T=350\text{K}$ .....	83
<b>Figura 9.23:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .....	84
<b>Figura 9.24:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .....	84
<b>Figura 9.25:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .....	85





<b>Figura 9.26:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .....	85
<b>Figura 9.27:</b> Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .....	85
<b>Figura 9.28:</b> Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .....	86
<b>Figura 9.29:</b> Resultados obtenidos en ambas simulaciones de tracción variando el coeficiente de dilatación .....	87
<b>Figura 9.30:</b> Resultados obtenidos en ambas simulaciones de compresión variando el coeficiente de dilatación .....	87
<b>Figura 9.31:</b> Resultados obtenidos en ambas simulaciones de tracción variando el coeficiente de Taylor-Quinney .....	88
<b>Figura 9.32:</b> Resultados obtenidos en ambas simulaciones de compresión variando el coeficiente de Taylor-Quinney .....	88
<b>Figura 9.33:</b> Resultados obtenidos en simulaciones de tracción con o sin influencia de la temperatura .....	89
<b>Figura 9.34:</b> Resultados obtenidos en simulaciones de compresión con o sin influencia de la temperatura .....	90
<b>Figura 9.35:</b> Comparativa entre la deformación plástica equivalente y la deformación por la T .....	91
<b>Figura 9.36:</b> Deformación producida por la T.....	91
<b>Figura 9.37:</b> Comparativa entre la deformación plástica equivalente y la deformación por la T .....	92
<b>Figura 9.38:</b> Deformación plástica equivalente en una simulación de una probeta cilíndrica con entalla de $r=254\text{mm}$ .....	93
<b>Figura 9.39:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a $T=260\text{K}$ .....	94
<b>Figura 9.40:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a $T=300\text{K}$ .....	94
<b>Figura 9.41:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a $T=330\text{K}$ .....	95
<b>Figura 9.42:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a velocidad de deformación $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .....	95



<b>Figura 9.43:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a velocidad de deformación $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .....	95
<b>Figura 9.44:</b> Resultados obtenidos en la probeta con $r=0.127\text{mm}$ a velocidad de deformación $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .....	96
<b>Figura 9.45:</b> Resultados de carga-desplazamiento para $r=0.127\text{mm}$ .....	97
<b>Figura 9.46:</b> Resultados de carga-desplazamiento para $r=0.256\text{mm}$ .....	97
<b>Figura 9.47:</b> Resultados de carga-desplazamiento para $r=0.127\text{mm}$ .....	98
<b>Figura 9.48:</b> Resultados de carga-desplazamiento para $r=0.256\text{mm}$ .....	98
<b>Figura 9.49:</b> Deformación plástica equivalente en una simulación de una probeta con una entalla con un ángulo de $30^\circ$ .....	100
<b>Figura 9.50:</b> Resultados obtenidos en la probeta con entalla de $45^\circ$ a $T=300\text{K}$ .....	101
<b>Figura 9.51:</b> Resultados obtenidos en la probeta con entalla de $30^\circ$ a $T=300\text{K}$ .....	101
<b>Figura 9.52:</b> Resultado obtenidos en probeta con entalla de $45^\circ$ a velocidad de deformación de $10^{-1}\text{s}^{-1}$ . ....	102
<b>Figura 9.53:</b> Resultado obtenidos en probeta con entalla de $30^\circ$ a velocidad de deformación de $10^{-1}\text{s}^{-1}$ . ....	102
<b>Figura 9.54:</b> Resultados obtenidos con $T=300\text{K}$ y velocidad de deformación $10^{-2}\text{s}^{-1}$ . ....	103
<b>Figura 9.55:</b> Resultados carga-desplazamiento de probeta con entalla $45^\circ$ . ....	103
<b>Figura 9.56:</b> Zoom en curva carga-desplazamiento para entalla de $45^\circ$ .....	104
<b>Figura 9.57:</b> Resultados carga-desplazamiento de probeta con entalla $30^\circ$ . ....	104
<b>Figura 9.58:</b> Zoom en curva carga-desplazamiento para entalla de $30^\circ$ .....	105



# CAPÍTULO 1

---

## OBJETIVOS Y CONTENIDO DEL PROYECTO



## **1.1. MOTIVACIÓN DEL PROYECTO**

---

Las “nuevas tecnologías” son actualmente un componente muy importante en el ámbito económico por su existencia casi omnipresente. Constituyen la parte fundamental de toda una revolución científico-tecnológica que impacta el ámbito productivo.

La ciencia de los materiales surgió después de la Segunda Guerra Mundial, como respuesta a la necesidad de producir materiales con propiedades especializadas.

Los éxitos obtenidos en la producción de nuevos aceros empezaron a extenderse a los materiales como los polímeros y las cerámicas, obligando a crear un conjunto de estudios que permitieran la captación de personal especializado en controlar las propiedades de la materia, es aquí donde se engloba este proyecto, en el estudio del comportamiento de los polímeros, en especial del PMMA, uno de los que mayor desarrollo y aplicaciones tiene en la actualidad.

La creación y utilización de los nuevos materiales comenzó a tener una tasa creciente a partir de los años setenta. Se encuentra aquí una tendencia a sustituir los materiales tradicionales por nuevos materiales. Esta tendencia ha resultado ser tan grande incluso como para crear nuevos sectores tecnológicos a partir del diseño y la aplicación de nuevos materiales. A pesar de que las áreas para las que se han desarrollado en su mayoría son muy específicas e involucran usos nuevos, los materiales creados cuentan con capacidades que rebasan o al menos satisfacen con eficiencia condiciones de operación en aplicaciones que pertenecían con explicito reconocimiento a materiales tradicionales.

En este ámbito los polímeros han tenido un crecimiento sin igual en las pasadas dos décadas debido a que su fabricación y los procesos que implican son muy sencillos en general, además, presentan un bajo peso y pueden tener distintas capacidades físicas y químicas, a veces extremas. Tienen sus aplicaciones más importantes en sectores como la construcción, la fabricación de automóviles y prácticamente toda la industria electrónica.

Debido a este aumento en el consumo de materiales poliméricos, bien por sus semejanzas físicas con otros materiales o bien por sus connotaciones económicas se hace necesario el estudio del comportamiento de estos materiales, para con ello poder mejorar alguna de sus múltiples aplicaciones, e incluso encontrar otras nuevas, dentro de este enfoque se engloba el estudio de este proyecto.



Este incremento en el uso de polímeros para muchas aplicaciones industriales lleva a una necesidad de desarrollo de modelos constitutivos dedicados a la simulación del comportamiento durante los procesos de producción o bien durante el servicio de los mismos. Hay una ausencia de modelos constitutivos capaces de reproducir el comportamiento experimental. Aunque algunas investigaciones han llevado a cabo modelos 3D adecuados para la predicción de los procesos mecánicos de los productos industriales fabricados a partir de polímeros, menos avances se han hecho, hasta ahora, para el modelado en comportamiento durante la fase de puesta en servicio.

Los polímeros son conocidos por exhibir una tasa muy pronunciada y dependiente de la temperatura y la visualización de respuestas no lineales durante la carga y descarga. Con una importante deformación inelástica, denotado como viscoplástico, se puede observar incluso a deformaciones muy pequeñas.

Es por todas estas características particulares en el comportamiento de los polímeros, por lo que se hace necesario seguir investigando en este campo a fin de encontrar modelos adecuados y que cumplan con todas las especificaciones necesarias para conocer su comportamiento termoelastoplástico.



## **1.2. OBJETIVOS DEL PROYECTO**

---

El objetivo principal de este proyecto fin de carrera es avanzar en el estudio del comportamiento termoelastoplástico de uno de los materiales poliméricos más utilizados en la actualidad, el PMMA, mediante un análisis de elementos finitos utilizando el código comercial denominado Abaqus.

La consecución del objetivo principal conlleva la superación de los siguientes aspectos u objetivos subyacentes:

- Estudiar el comportamiento del PMMA en ensayos a bajas velocidades (cuasi estáticos).
- Realizar un estudio de la sensibilidad del PMMA ante parámetros tales como la temperatura, la velocidad de deformación, coeficiente de dilatación, etc.
- Estudiar la aplicabilidad de diferentes modelos de plastificación, tales como Von Mises u otros propuestos a lo largo del proyecto que incluyen el resto de invariantes del desviador de tensiones a través de la inclusión de una subrutina en Abaqus.

Otro valor de estudio es evaluar la capacidad de la herramienta Abaqus, para este tipo de estudios. Los resultados obtenidos en el proyecto servirán de datos de referencia para futuros estudios, que puedan contrastarse con otras herramientas o con ensayos reales y de esta manera se valide la capacidad de Abaqus en el análisis de este tipo de elementos y/o materiales.



### **1.3. ESTRUCTURA DEL PROYECTO**

---

El contenido de este documento se ha dividido en 11 capítulos, que se describen a continuación:

- **Capítulo 1: *Objetivos y contenido del proyecto***

En él se presenta la motivación de este proyecto, los objetivos propuestos y la estructura del documento. Incluye esta descripción.

- **Capítulos 2,3,4,5 y 6: *Marco teórico***

Estos capítulos forman un bloque en el que se describe el marco teórico en el que se desarrolla el proyecto.

En el segundo capítulo se presenta una introducción sobre los materiales poliméricos, sus características y tipos.

En el tercer capítulo se presenta un resumen más detallado sobre el PMMA, material sobre el cual se realizan los ensayos posteriores.

En el cuarto capítulo se muestran las bases de las herramientas de elementos finitos, y la metodología asociada a su uso.

En el quinto capítulo se detalla el funcionamiento de la herramienta empleada, ABAQUS.

El sexto capítulo se centra en profundidad en el comportamiento mecánico de los materiales poliméricos, y en más detalle en los distintos criterios de plasticidad. Acaba con una conclusión sobre el criterio a seguir en los ensayos con PMMA.

- **Capítulo 7: *Subrutina utilizada en Abaqus***

En éste capítulo se realiza una explicación sobre el funcionamiento de la subrutina a utilizar en los ensayos, así como el camino recorrido para llegar a ella y la gama de posibilidades que nos da para el desarrollo de problemas y obtención de resultados. Se incluyen también las distintas ecuaciones constitutivas del material que influirán en su comportamiento y que se definen con la subrutina a Abaqus.

- **Capítulo 8: *Definición de los ensayos***

En él se particularizan cada uno de las simulaciones que se van a realizar en el proyecto con una explicación detallada de cada una de ellas así como de las distintas variaciones o modificaciones posibles en las características del material.



▪ **Capítulo 9: Resultados**

Incluye los resultados obtenidos en las simulaciones descritas con anterioridad. En él se analizan los datos de salida de la herramienta (Abaqus) y se estudian cómo afectan los cambios desarrollados en el material en cada simulación.

▪ **Capítulo 10: Conclusiones y trabajos futuros**

Se exponen las conclusiones extraídas de los análisis realizados. Se muestra un análisis en relación a los objetivos propuestos y se valora lo conseguido. Se proponen distintos trabajos futuros relacionados con el proyecto, que continúen la línea de investigación iniciada por este proyecto y que lo complementen.

▪ **Capítulo 11: Bibliografía**

Se enumeran las fuentes de información que se han empleado tanto para el desarrollo del proyecto como para la redacción del presente documento.





## CAPÍTULO 2

---

### INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES POLIMÉRICOS

## 2.1. ESTRUCTURA DE LOS POLÍMEROS

Los materiales poliméricos, dentro de los cuales se encuentran los denominados comúnmente “plásticos”, son materiales de naturaleza orgánica formados por cadenas o macromoléculas de gran tamaño que a su vez están formadas por unidades repetitivas, unidas entre sí por enlaces covalentes.

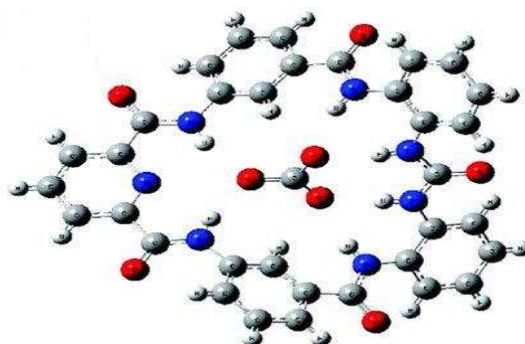
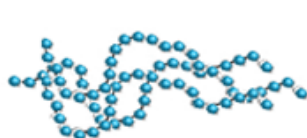


Figura 2.1 Macromolécula o cadena polimérica [A].

En función de cómo se unan estas cadenas entre sí, los polímeros pueden presentar diversas estructuras con muy diferentes propiedades, lo que les confiere una altísima versatilidad. Para comprender el comportamiento de este tipo de materiales, hay que enumerar una serie de nociones estructurales básicas que determinan su estructura y por tanto sus propiedades [1].

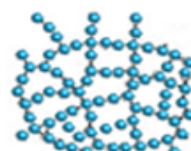
- **Ramificaciones:** Los polímeros están formados por cadenas o macromoléculas, pero éstas a su vez, pueden estar ramificadas impidiendo de esta forma el apilamiento de cadenas entre sí, lo cual disminuirá la densidad del material y dificultará su cristalinidad.
- **Entrecruzamientos:** Consisten en la unión de diferentes cadenas a través de las ramificaciones de éstas. Esto provoca que la unión entre las cadenas se produzca a través de enlaces covalentes, lo que afecta gravemente a las propiedades mecánicas y térmicas del material y será un factor clave a la hora de distinguir entre los diferentes tipos de materiales poliméricos como se verá más adelante.



Termoplástico



Elastómero



Termoestable

Figura 2.2 Tipos de materiales poliméricos.

- **Tacticidad:** Este fenómeno regula la posición relativa de los grupos laterales o funcionales del polímero, lo cual también afectará al apilamiento de las cadenas. Pueden darse tres configuraciones: isotáctica, sindiotáctica y atáctica.

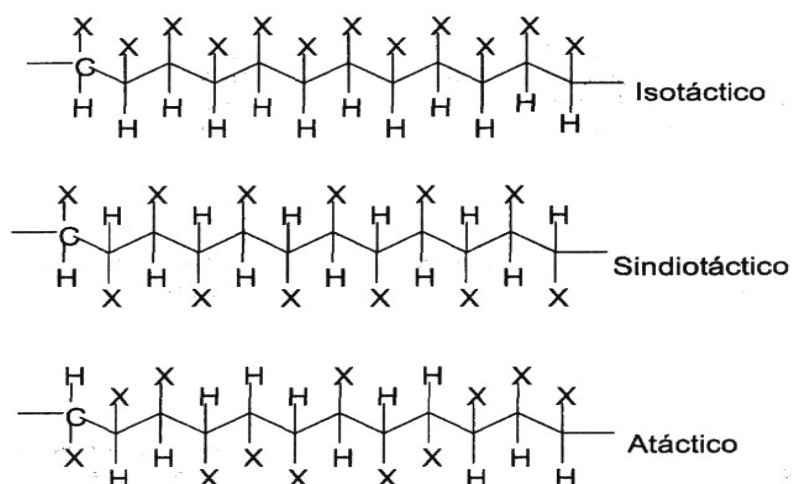


Figura 2.3 Tipos de configuraciones de los polímeros según la tacticidad.

- **Copolimerización:** Este fenómeno se produce cuando se tienen cadenas poliméricas formadas por unidades monoméricas de diferente naturaleza, lo cual es una muestra más de la gran versatilidad de propiedades que ofrecen estos materiales.
- **Estado conformacional:** Indica el estado energético de la molécula. Está determinado por un nivel de energía potencial que indica la energía que es necesario aportar para forzar determinados giros en la cadena. Es, por lo tanto un indicador de la flexibilidad del material.
- **Cristalinidad:** Dentro de un material polimérico se pueden encontrar dos tipos de regiones según el ordenamiento de las cadenas de lo forman. En primer lugar está en la zona cristalina, donde las cadenas se agrupan de forma ordenada. Es una zona que solo admite deformaciones reversibles y que aporta al material rigidez y elasticidad. Y por otro lado, las zonas amorfas que rodean a las cristalinas y en las cuales las cadenas se disponen de forma desordenada. Esta zona admite deformaciones permanentes y aporta al material un comportamiento viscoso. Además, según el proceso de cristalización, presentarán una morfología laminar o esferulítica. En conclusión, el comportamiento del material estará determinado por el porcentaje de cristalinidad de éste, de forma que a mayor cristalinidad, mayor rigidez, opacidad, estabilidad dimensional y temperatura de fusión.

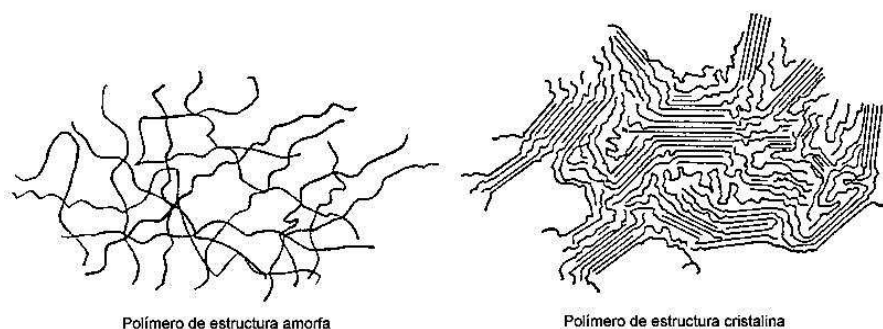


Figura 2.4 Estructuras amorfa y cristalina de un polímero.

- **Efectos térmicos:** La diferente respuesta térmica es el elemento clave que diferencia los tres tipos básicos de polímeros que se verán más adelante. Sin embargo cualquiera de los casos, hay que destacar dos valores críticos en los que se produce un notable cambio estructural del polímero. La temperatura de transición vítrea (temperatura a partir de la cual empieza a haber movilidad en la zona cristalina del polímero y por debajo de la cual el comportamiento es totalmente vítreo) y la temperatura de fusión (temperatura a partir de la cual hay movilidad en todas las cadenas, por lo que hay una pérdida del orden y la cristalinidad, formándose un fluido viscoso). Por lo tanto es muy importante conocer estas temperaturas en un polímero, dado que provocan un cambio radical en sus propiedades.

## 2.2. TIPOS DE MATERIALES POLIMERICOS

Ya se ha comentado, los polímeros están formados por una serie de cadenas de gran tamaño. Sin embargo, estas cadenas pueden estar unidas entre sí de diferentes maneras. En función del tipo de enlace que se establezca entre las cadenas se obtienen materiales con muy diferente comportamiento donde destaca la diferente respuesta ante los cambios de temperatura. Según esto se pueden distinguir tres tipos de polímeros:

- **Termoplásticos:** Son el grupo más extenso de materiales poliméricos, corresponden a lo que comúnmente llamamos plásticos y dentro de él se encuentra el material de estudio de este trabajo (PMMA). Se caracterizan porque las diferentes cadenas o macromoléculas se unen entre sí por fuerzas intermoleculares de tipo Van Der Waals sin existir ningún tipo de entrecruzamiento. Esta unión, relativamente débil, dependerá de la polaridad de los grupos funcionales y determinará las propiedades mecánicas y térmicas del polímero. El comportamiento térmico de los materiales termoplásticos se caracteriza por una alta sensibilidad a los cambios de temperatura. De forma que las propiedades mecánicas disminuirán con el aumento de temperatura, hasta el punto de que al superar la temperatura de fusión, el material fluye como un líquido viscoso, lo que le da la virtud de ser reciclable. Aparte del PMMA, pertenecen a este grupo otros materiales como PE, PP, PVC, PS, PC, PET, PBT, POM, PA, etc.

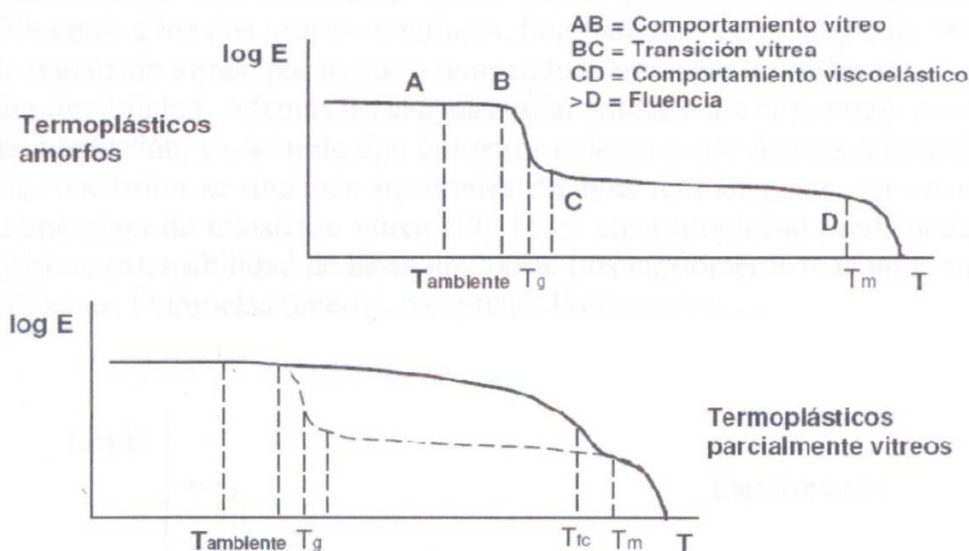


Figura 2.5 Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros termoplásticos.

- **Termoestables:** También conocidos como duro plásticos, estos materiales se caracterizan, al contrario de los termoplásticos, por poseer un alto grado de entrecruzamiento. Es decir, las diferentes cadenas se unen entre sí a través de otras cadenas por lo que permanecen unidas mediante enlaces covalentes, formando una reticulación de alta resistencia. Este proceso de reticulación se consigue mediante una reacción irreversible de curado posterior a la polimerización. Además de una alta resistencia, rigidez y tenacidad, estos materiales se caracterizan por su estabilidad térmica de forma que, al contrario que los termoplásticos, al aumentar la temperatura las cadenas no fluyen y por tanto mantienen sus propiedades mecánicas hasta que se degradan importantes de este grupo, son: Poliuretano, Resinas Epoxi, Resinas Fenólicas, Poliésteres termoestables, Amino resinas y Poliamidas entrecruzadas.

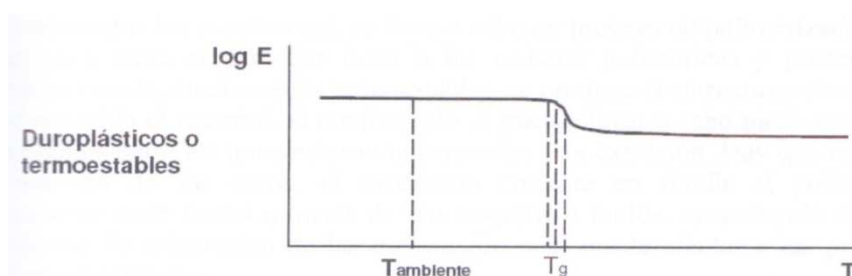


Figura 2.6 Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros termoestables.

- **Elastómeros:** Los materiales elastoméricos presentan unas propiedades muy diferentes a los dos grupos anteriores. Son materiales con muy baja temperatura de transición vítrea, por lo que a temperatura ambiente las cadenas presentan una alta flexibilidad. Además las cadenas están unidas entre sí por muy pocos puntos de interacción, ya sean de tipo entrecruzamiento o por fuerzas intermoleculares. En conclusión se obtienen materiales estables térmicamente por encima de la temperatura de transición vítrea y cuya propiedad fundamental es una altísima extensibilidad de hasta un 200%. Los elastómeros más importantes son: Siliconas, Fluoroelastómeros, Neopreno, Poliisopreno...

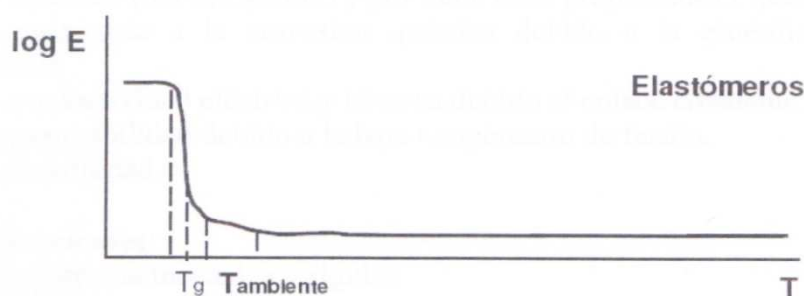


Figura 2.7 Variación del módulo de elasticidad con la temperatura en polímeros elastómeros.



## **2.3. PROCESADO DE LOS POLIMEROS**

---

Una de las ventajas de estos materiales es la abundante materia prima disponible y el bajo coste de proceso debido a su baja temperatura de fusión.

Los materiales poliméricos se obtienen a partir del refino del petróleo. Concretamente, un 3% de las fracciones del petróleo se emplean en la obtención de monómeros. El refino del crudo da lugar a gases, gasolinas, keroseno, se emplea para la obtención de monómeros.

Una vez obtenidos los monómeros, se lleva a cabo un proceso de polimerización, donde éstos se unen entre sí para dar lugar a las cadenas poliméricas y posteriormente, mediante un curado, en el caso de termoestables, se produce el entrecruzamiento.

Una vez obtenido el material, el conformado se puede llevar a cabo mediante múltiples procedimientos entre los que destacan la inyección y la extrusión. Hay que resaltar que en la mayoría de los casos, el procesado consiste en fundir el polímero para posteriormente darle forma a través de una boquilla o molde, apareciendo direcciones preferenciales de orientación de las cadenas, lo cual puede afectar a las propiedades mecánicas del polímero.



## 2.4. CARACTERÍSTICAS DE LOS POLIMEROS

Los materiales poliméricos están presentes en multitud de los productos que se fabrican en la actualidad, y hoy en día su utilidad está más que contrastada. Sin embargo en los inicios de la aplicación, estos materiales eran perseguidos por una mala fama, de forma que “plástico” era sinónimo de mala calidad. Esto era debido a que tradicionalmente fueron empleados como materiales de sustitución, donde en muchos casos ni siquiera se llevaba a cabo una adaptación del diseño. Pese a todo, hoy en día, las ventajas de este tipo de materiales está más que demostrada, situándose entre los materiales más empleados en la industria. A continuación se resumen las características más destacables de los materiales poliméricos.

- Ventajas:
  - Baja densidad ( $0,8-2,2 \text{ g/cm}^3$ ) y por tanto altas propiedades específicas.
  - Alta resistencia a la corrosión química debido a la estabilidad del enlace covalente.
  - Baja conductividad eléctrica y térmica debido al enlace covalente.
  - Alta procesabilidad debido a la baja temperatura de fusión
  - Alta versatilidad.
- Inconvenientes:
  - Baja resistencia mecánica y rigidez
  - Baja resistencia térmica
  - Propiedades variables en el tiempo (fenómenos reológicos)

En conclusión, todas estas ventajas hacen que la utilización de materiales poliméricos haya tenido un crecimiento exponencial, de forma que estos materiales desarrollen un papel fundamental en la industria actual, interviniendo en múltiples sectores de la misma.



Figura 2.8 Sectores industriales en los que se aplican los polímeros.





## CAPÍTULO 3

---

### EL POLIMETILMETACRILATO



### **3.1. EL POLIMETILMETACRILATO**

---

El ámbar y el carey son plásticos naturales que el hombre conoce y usa desde hace miles de años, ya que presentan buenas propiedades y sólo es necesario modelarlos con la forma adecuada. Sin embargo, la aparición de los plásticos artificiales es relativamente reciente.

En 1860, un concurso en Estados Unidos premiaba con 10.000 dólares al creador de un material alternativo al marfil para la fabricación de bolas de billar [3]. El ganador fue John W. Wyatt con el primer tipo de plástico artificial, el celuloide. Años después, en 1907 Leo Baekeland descubrió la baquelita y su hallazgo estimuló la búsqueda de otros plásticos. En los años 30 aparecen el polietileno (PE), el poliestireno (PS), el nylon y el polimetacrilato de metilo (PMMA) y a partir de la década de los 50, el polietileno (PET). Es una vez acabada la Segunda Guerra Mundial cuando el abaratamiento del petróleo y sus derivados permiten el rápido crecimiento de sus aplicaciones.

Concretamente, el PMMA aparece en 1928 de la mano del químico alemán Walter Bauer de la Röhm&HaasCompany en Darmstadt (Alemania), aunque no es hasta 1933 cuando se desarrolla el método para producirlo industrialmente.

### 3.2. ESTRUCTURA QUÍMICA

El Polimetacrilato de metilo es un polímero vinílico, formado por polimerización vinílica de radicales libres a partir del monómero metilmetacrilato, un derivado del ácido acrílico.

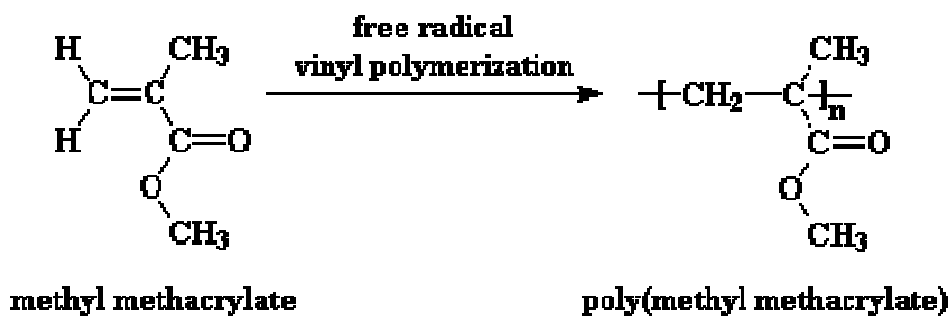


Figura 3.1 Formación del PMMA.

Por lo tanto está formado por una cadena carbonatada cuyo sustituyente principal es un grupo funcional del tipo  $\text{COOCH}_3$  dispuesto siempre atácticamente. Este grupo determina las propiedades fundamentales del material.

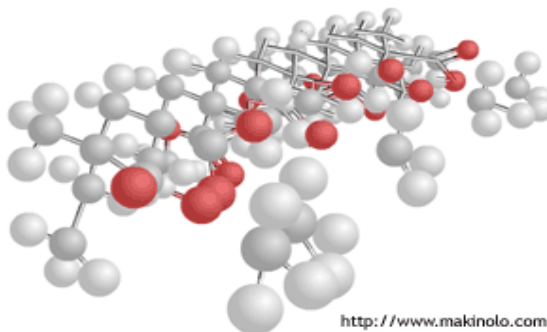


Figura 3.2 Estructura del PMMA [B].

### **3.3. CARACTERISTICAS GENERALES DEL PMMA**

---

El PMMA es un polímero termoplástico atáctico y amorfo, obtenido fundamentalmente por poli adición radicalica en bloque o en suspensión. Su estructura responde a la que se muestra en la figura. Por lo tanto está formado por una cadena carbonatada cuyo sustituyente principal es un grupo funcional del tipo  $\text{COOCH}_3$  dispuesto siempre atácticamente. Este grupo determina las propiedades fundamentales del material.

- **Propiedades ópticas:**

La característica más importante del PMMA es su alta capacidad para la transmisión de luz, aproximadamente de un 92% que le convierte en un material altamente transparente y con ausencia de color. Esto es debido a que el grupo  $\text{COOCH}_3$  presenta un doble enlace  $\text{C}=\text{O}$ , un enlace plano, que provoca que el grupo sea muy voluminoso. Esto evidentemente dificulta el apilamiento de las cadenas y por tanto la cristalinidad, hasta el punto de que el material es prácticamente 100% amorfo. Este fenómeno es el que facilita la alta transparencia del PMMA que además se mantiene, incluso para grandes espesores, algo muy útil para la fabricación de piezas transparentes de alta resistencia como por ejemplo las ventanillas de los aviones.

Además de su alta transparencia, hay que destacar que en el caso del PMMA y al contrario que con otros polímeros transparentes, el material es poco sensible a la luz ultravioleta (debido a que no presenta anillos bencénicos en su molécula) por lo que no amarillea con el tiempo.

La limitación fundamental de las propiedades ópticas del PMMA frente al vidrio, es su deficiente resistencia a la abrasión. Todos los intentos que se han hecho para mejorar su resistencia al rayado o dureza superficial, han empeorado alguna otra propiedad, como su resistencia al impacto.

Además del PMMA, los otros polímeros transparentes más conocidos, son el Poliestireno (PS) y el Policarbonato (PC). Ambos presentan peores propiedades ópticas y tienden a amarillear. Además, frente al PS, el PMMA ofrece mejores propiedades mecánicas y térmicas, ya que presenta un punto de reblandecimiento mayor, tiene mayor tenacidad y por tanto resistencia al impacto y sobre todo, soporta mejor el cuarteamiento a la intemperie. Por el contrario, el PC aventaja al PMMA en cuanto a propiedades mecánicas aunque presenta el importante inconveniente de ser notablemente más caro.



- **Propiedades mecánicas:**

Dentro de los órdenes de magnitud de las propiedades mecánicas de los materiales plásticos, el PMMA presenta unos valores más que aceptables. El hecho de que la molécula tenga un grupo sustituyente muy voluminoso, limita su flexibilidad y le aportan una alta rigidez y dureza pese a no ser cristalino. Además, el PMMA ofrece muy buena resistencia a tracción y una relativamente buena tenacidad, lo que le proporciona un buen comportamiento frente a impacto. Estas características, unidas a su baja densidad, hacen del PMMA un material con amplio campo de aplicación.

- **Propiedades químicas:**

Aparte de las propiedades derivadas del volumen del  $\text{COOCH}_3$ , desde el punto de vista químico, hay que destacar que se trata de un grupo muy polar. Esto le aporta al PMMA dos características fundamentales: Por un lado ofrece una alta reactividad química por lo que admite bien todo tipo de colorantes (algo muy útil para su aplicación en pilotos traseros de automóviles) y es soluble en algunos disolventes orgánicos ( $\text{CHCl}_3$ , cetonas...) por lo que también se utiliza como base en adhesivos y pinturas. Y por otro lado es resistente a muchos reactivos inorgánicos acuosos, incluidos ácidos y álcalis diluidos, lo que le proporciona una buena resistencia a la intemperie.

### **3.4. APLICACIONES DEL PMMA**

---

Como ya se ha comentado, la principal característica del PMMA es su alta transparencia, lo cual hace que tenga una altísima utilidad para la industria. Es, sin duda, el material polimérico de referencia para aplicaciones transparentes y frente al vidrio aporta, entre otras cualidades, una mejor resistencia a impacto y un menor peso. Estas características han permitido utilizar el PMMA en numerosos productos:

- **Construcción:** los ejemplos del uso de este material en el ámbito de la construcción son verdaderamente variados. E emplea en la fabricación de ventanas para acuarios, donde el PMMA presenta una gran ventaja con respecto al vidrio y es que cuando las ventanas de vidrio se hacen demasiado gruesas pierden transparencia, sin embargo con PMMA se puede llegar a los 33cm de espesor y siguen siendo totalmente transparentes. Es también bastante popular en la construcción de invernaderos, pantallas, barreras protectoras, mamparas, etc.



Figura 3.3 Cubierta de piscina climatizada.



Figura 3.4 Barrera protectora de una pista de hielo.



Figura 3. 5 Mampara protectora de una escalera automática.

- **Medicina:** se consume como aditivo en polvo en la formulación de pastillas tomadas por vía oral y actúa como retardante a la acción del medicamento para que esta sea progresiva. También se emplea en la fabricación de prótesis óseas y dentales.
- **Óptica:** se utiliza en lentes de contacto, en lentes intraoculares, como prótesis de córnea proporcionando una vía óptica a la retina e implantado como ducto del saco lagrimal, para corregir la obstrucción crónica.



Figura 3.6 Prótesis de odontología y lentes de contacto.

- **Mobiliario:** la variedad de diseños, colores, acabados y su resistencia a los golpes abren un mundo de posibilidades para su uso en arquitectura y decoración, se puede ver en muebles, expositores vitrinas, urnas, etc.
- **Automóvil:** compitiendo con otros plásticos en pilotos traseros e intermitentes.





Figura 3.7 Mobiliario de PMMA y letrero luminoso de coche patrulla.

- **Electricidad y electrónica:** se usa en fibra óptica y en la fabricación de DVDs.



Figura 3.8 Fibra óptica y urnas de PMMA [E].

- **Colas, adhesivos y pinturas:** como ya se ha comentado anteriormente la molécula  $\text{COOCH}_3$  es muy polar, lo que hace que el PMMA pueda ser empleado como base en este tipo de productos.
- **Otros:** iluminación, menaje, envases y embalajes, electrodomésticos, aparatos de laboratorio, señales, letreros, paneles luminosos, etc.



Figura 3.9 El cuadro "Acrylic Elf", pintado por Pete Halverson por medio de pinturas acrílicas.

El PMMA ha sido comercializado bajo los más diversos nombres: Vidrio Acrílico, Plexiglás, Vitroflex, Lucite, Perspex o Diakon.



### 3.5. PROPIEDADES DEL PMMA

En este apartado se van a resumir los valores de las propiedades más importantes del PMMA, aunque no todas nos serán útiles en las diferentes simulaciones. Los datos se muestran en forma de tabla y han sido obtenidos de la bibliografía indicada:

PROPIEDAD	VALOR	CONDICIONES
<b>PROPIEDADES GENERALES</b>		
Densidad (g, cm <sup>-3</sup> )	1,200	0 °C
	1,190	20 °C
	1,188	25 °C
	1,150	T <sub>g</sub>
<b>PROPIEDADES MECÁNICAS</b>		
Módulo de elasticidad (MPa)	2890	
Límite elástico (MPa)	40,2	
Coeficiente de Poisson	0,401	
Tenacidad a fractura (MPa√m)	1,13	
	1.01	
Módulo de cizalla (MPa)	1700	25 °C, 10Hz
Factor de amortiguamiento	0,08	25 °C, 10Hz
<b>PROPIEDADES ÓPTICAS</b>		
Índice de refracción	1,492	589nm
	1,494	546nm
	1,502	436nm
<b>PROPIEDADES TÉRMICAS</b>		
Capacidad calorífica (KJ/KgK)	1,42	25 °C
Conductividad térmica (W/mK)	0,160	-20 °C
	0,193	0 a 50 °C
	0,250	100 °C
Coef. Expansión térmica (K <sup>-1</sup> )	0,00007	0-50 °C
Temperatura transición vítrea (°C)	110	

Tabla 1 Propiedades del PMMA [F].



## CAPÍTULO 4

---

### MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

#### **4.1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico que se emplea para resolver problemas de ingeniería y de física matemática. En los elementos con geometrías complejas, a los que se les aplican determinados sistemas de cargas y están constituidos por materiales diversos, generalmente no es posible obtener una solución matemática exacta de forma analítica.

Las expresiones analíticas son aquellas que se basan en fórmulas matemáticas para obtener los valores de las variables desconocidas deseadas, en cualquier lugar de un cuerpo objeto de estudio y son válidas para cualquier punto de este. Este tipo de soluciones generalmente requieren ser resueltas mediante ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias, que por la complejidad de la geometría, sistema de cargas o por las propiedades de los materiales empleados generalmente no se pueden resolver. Esto nos llevaría a aplicar una serie de hipótesis que simplifiquen el modelo, que pueden influir en la precisión del resultado final.

Por lo tanto, se ha de confiar en los métodos numéricos, como el de los elementos finitos, mediante el cual, la solución del problema se da resolviendo un sistema de ecuaciones en diferencias de forma iterativa en vez de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Se denomina discretización a la transformación de un sistema continuo en otro equivalente formado por pequeñas entidades o unidades de pequeño tamaño (elementos finitos) de geometría simple, interconectadas en los puntos comunes de dos o más elementos, líneas de contorno o superficies.

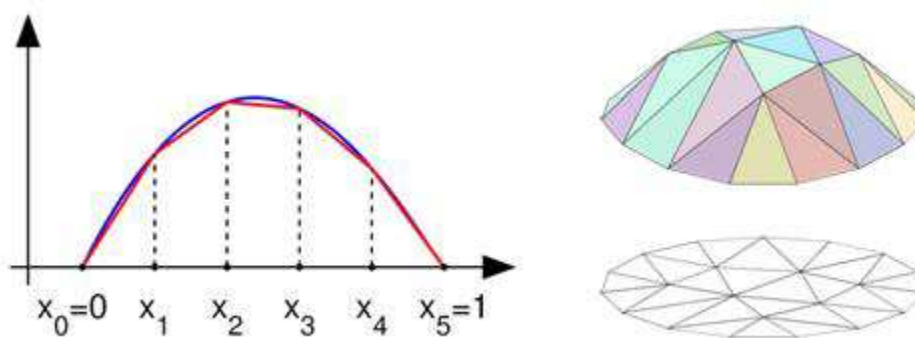


Figura 4.1 Discretización en elementos finitos.

Mediante este procedimiento, en lugar de solucionar el problema de dominio en una sola operación, se aplican las leyes físicas a cada uno de los elementos finitos y al combinarlos se obtiene la solución total. La exactitud del método depende del número de elementos discretos en el que dividamos el modelo continuo.

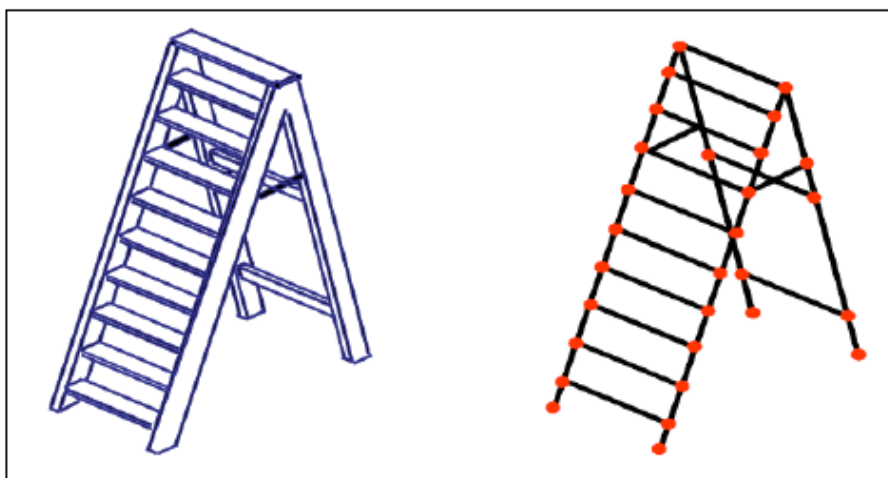


Figura 4.2 Sistema "real" y sistema de elementos finitos.

Normalmente, la solución de problemas de tipo estructural se basa en la determinación de los desplazamientos en cada nodo y de las tensiones dentro de cada uno de los elementos que componen la estructura, que se someten a las cargas aplicadas.

Debido a la complejidad del cálculo se ha de recurrir a las nuevas tecnologías para agilizarlo. Por ello, el método de los elementos finitos (MEF) surge de la aplicación de los planteamientos matriciales apoyándose sobre el desarrollo de los ordenadores y de los procedimientos numéricos para los mismos. En su desarrollo ha influido fundamentalmente el progreso en la tecnología de los ordenadores y de sus periféricos y los avances teóricos de nuevos conceptos computacionales.

El método de elementos finitos (MEF) se ha convertido en un elemento clave e indispensable en la tecnología, modelización y simulación de sistemas de ingeniería avanzada en diversos campos como la vivienda, transporte, comunicaciones, etc. En la construcción de sistemas de ingeniería avanzada, ingenieros y diseñadores realizan un sofisticado proceso de modelización, simulación, visualización, análisis, diseño, prototipos y pruebas antes de llegar a la fabricación del citado sistema para garantizar su viabilidad y rentabilidad. Algunos de los procedimientos se repiten sobre la base de los resultados obtenidos en una etapa con la finalidad de lograr un rendimiento óptimo al menor coste para el producto a construir. Por lo tanto, las técnicas relacionadas con la modelización y simulación de forma rápida y eficaz juegan un papel cada vez más importante y la aplicación del método de elementos finitos se multiplica en numerosas ocasiones por este motivo.

#### **4.1.1.- Elementos básicos de los modelos MEF**

- **Nodo**

Un nodo es un punto de unión entre los elementos en los que se dividen las piezas del modelo. De este modo, cada nodo ocupará una posición de coordenadas en el espacio donde están definidos los grados de libertad. Los grados de libertad asociados a este punto representan los posibles movimientos que éste puede describir al someter a carga la estructura, además de qué fuerzas y momentos se transfieren de un elemento al siguiente. Los resultados de un análisis por elementos finitos (desplazamientos, tensiones, etc.) suelen darse por nodos.

Los grados de libertad de un nodo (que dependen del tipo de elemento) indican también qué tipos de fuerzas y de restricciones se transmiten a través del nodo hasta el elemento. Una fuerza (axial o cortante) equivale a un grado de libertad de traslación. Un momento equivale a un grado de libertad de rotación. Así, para poder transferir un momento en torno a un determinado eje, el nodo debe tener ese grado de libertad. Si un nodo no posee ese grado de libertad de rotación, la aplicación de un momento a ese nodo no tendrá efecto alguno sobre el análisis. Del mismo modo, refrenar ese nodo con una condición de contorno rotacional no tendrá consecuencia alguna, puesto que el nodo no será capaz de transmitir el momento.

- **Elemento**

El elemento es el bloque constructivo básico del análisis por elementos finitos. Supone una relación matemática que define la interrelación entre los grados de libertad de un nodo y los del siguiente. Existen diferentes tipos básicos de elementos. Así, la elección del tipo de elemento que se empleará para realizar el análisis por MEF dependerá del tipo de modelo que se vaya a estudiar. Los principales tipos de elementos son:

- *Viga*: Empleados para análisis de dos o tres dimensiones de elementos que sean suficientemente esbeltos. Sólo se representan con una dimensión: longitud.

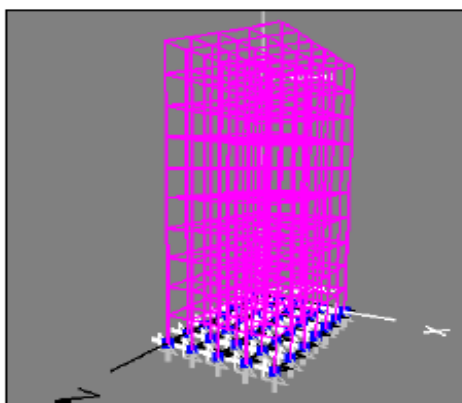


Figura 4.3 Mallado con elemento tipo viga.

- **Placa:** Utilizados para estructuras de paredes delgadas. En estos, se supone que la tensión varía linealmente en el espesor.

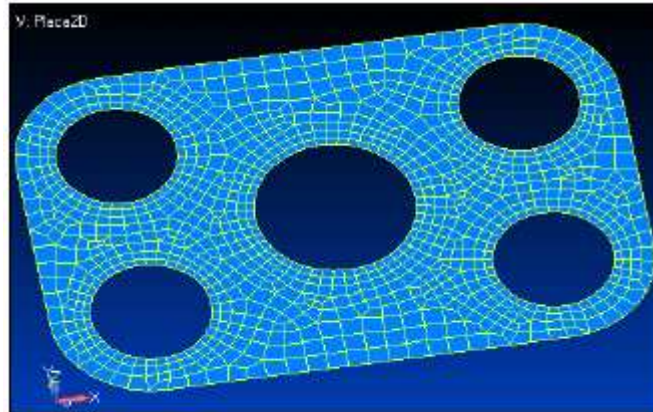


Figura 4.4 Mallado con elemento tipo placa.

- **Sólido:** Es el tipo de elemento más general. Existen varios tipos de elementos sólidos según sea la forma del objeto de estudio: bloque, tetraedro, hexaedro...

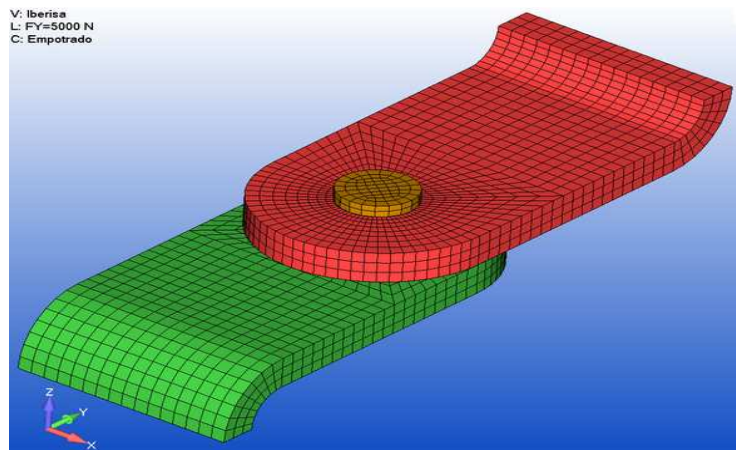


Figura 4.5 Mallado con elementos tipo sólido.

## **4.2. ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

A continuación se describen las fases típicas en la resolución de problemas mediante herramientas basadas en elementos finitos.

- ***Definición de la geometría objeto de estudio***

Consiste en la obtención de un dibujo en 2D o 3D, en malla de alambre, de las formas de los diferentes objetos en los que se pretenden resolver las ecuaciones de campo. Para efectuar este cometido los MEF suelen tener una herramienta CAD por debajo.

- ***Asignación de las propiedades físicas de los materiales***

Es aquí donde se definen las propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, etc. para cada uno de los objetos que se han generado en la fase anterior. Los MEF suelen tener una base de datos de propiedades de materiales, de forma que la asignación de propiedades se realice de forma más cómoda.

- ***Asignación de las condiciones de contorno***

En esta fase se definen propiedades de contorno, tales como restricciones, temperaturas exteriores, etc.

- ***Aplicación de las cargas***

Se entiende por cargas, las fuentes activas de campo. Éstas pueden ser, fuerzas puntuales, presiones, generaciones de calor, etc.

- ***Mallado de la geometría***

La geometría objeto de estudio se divide en diferentes elementos en los que se resuelven las ecuaciones de campo. El mallado se puede realizar por defecto, o bien el usuario del MEF puede crearla para dar mayor densidad de nodos en aquellas zonas que lo necesiten. El mallado es una tarea clave para que los resultados sean lo más cercanos a la realidad y habitualmente se establece un compromiso de exactitud/tiempo de cálculo.

- ***Resolución del sistema***

En esta fase del proceso se aplica el método de análisis por elementos finitos para obtener la solución del problema físico de forma iterativa. La solución se obtiene en cada uno de los elementos en que se descompone la geometría, aunque siempre es posible sumar o integrar estos pequeños elementos en una región determinada, ya sea área o volumen.

- ***Análisis de la solución***

Una vez obtenida la solución, es posible representar gráficamente la distribución que se trate.



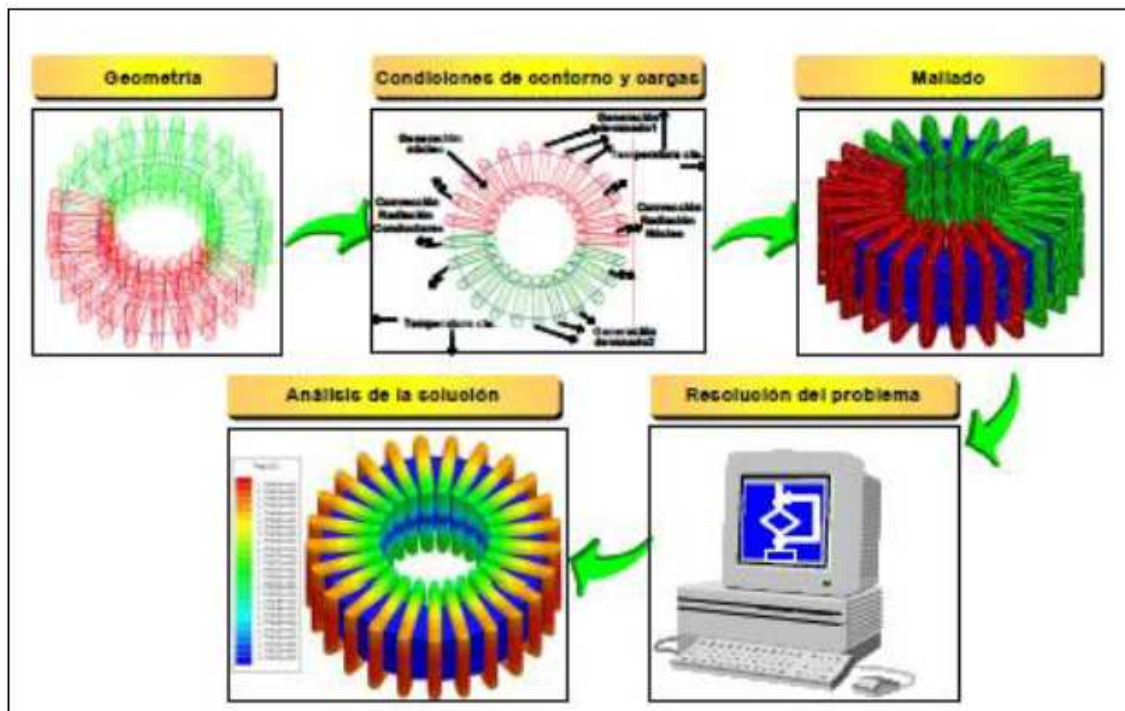


Figura 4. 6 Proceso de obtención de la solución mediante herramientas MEF.





#### **4.3. APLICACIONES**

---

El método de los elementos finitos se puede utilizar para estudiar tanto problemas estructurales como no estructurales. Las áreas típicas de resolución de problemas estructurales son:

- Análisis de tensiones en el modelo, especialmente los relacionados con la concentración de estas que generan agujeros, flancos y otros cambios en la geometría del cuerpo.
- Pandeo.
- Estudio de vibraciones, para evitar efectos indeseados si el sistema trabaja a frecuencias cercanas a su frecuencia propia.

Dentro de los problemas no estructurales se incluyen:

- Transferencias de calor.
- Flujo de fluidos, incluyendo filtración a través de medios porosos.
- Transporte de masa.
- Distribución de potencial electromagnético.

Además encontramos que también se aplica este método a algunos problemas de ingeniería biomecánica (que pueden incluir el cálculo de tensiones) como el análisis de la columna vertebral, el cráneo, las articulaciones, implantes dentales, el corazón o los ojos. Algunos economistas ya han propuesto la utilización de herramientas FEM para la simulación de situaciones económicas.

#### **4.4. VENTAJAS Y LIMITACIONES**

---

Las principales ventajas que supone el empleo de herramientas MEF son las siguientes:

- Se pueden crear cuerpos de modelos irregulares fácilmente.
- Aplicación de las condiciones de carga sin dificultad.
- El cuerpo del modelo puede estar compuesto de diferentes materiales ya que las ecuaciones en cada pequeño elemento se evalúan individualmente.
- Se pueden aplicar un ilimitado número de condiciones de contorno.
- Variar el tamaño de los elementos para hacer posible el uso de pequeños elementos cuando sea necesario.
- Alterar el modelo de elementos finitos es relativamente fácil y barato.
- Incluye efectos dinámicos.
- Manejar el comportamiento no lineal existente con grandes deformaciones y materiales no lineales.

Por el contrario, en general el empleo de herramientas MEF tal como se usa actualmente presenta algunas limitaciones:

- Calcula soluciones numéricas concretas y adaptadas a unos datos particulares de entrada pero no puede hacerse un análisis de sensibilidad sencillo que permita conocer como variará la solución si alguno de los parámetros se altera ligeramente. Es decir, proporciona sólo respuestas numéricas cuantitativas concretas no relaciones cualitativas generales.
- Proporciona una solución aproximada cuyo margen de error en general es desconocido. Si bien algunos tipos de problemas permiten acotar el error de la solución, debido a los diversos tipos de aproximaciones que usa el método, los problemas no-lineales o dependientes del tiempo en general no permiten conocer el error.
- La mayoría de aplicaciones prácticas requiere mucho tiempo para ajustar detalles de la geometría, existiendo frecuentemente problemas de mal condicionamiento de las mallas, desigual grado de convergencia de la solución aproximada hacia la solución exacta en diferentes puntos, etc. En general una simulación requiere el uso de numerosas pruebas y ensayos con geometrías simplificadas o casos menos generales que el que finalmente pretende simularse, antes de empezar a lograr resultados satisfactorios.

El análisis estructural mediante el método de los elementos finitos permite al diseñador detectar problemas de tensiones, vibraciones, temperaturas durante el proceso de diseño, para evaluar los posibles cambios en el mismo antes de la posible construcción de un prototipo. Así pues, la confianza en la aceptabilidad del prototipo es mayor. Además, si se utiliza correctamente, el método puede reducir el número de prototipos que deben ser contruidos antes de la fabricación del producto final.



## CAPÍTULO 5

---

ABAQUS



## **5.1. GENERACIÓN DE UN PROBLEMA EN ABAQUS**

---

ABAQUS es un programa destinado a resolver problemas de ciencias e ingeniería y está basado en el método de los elementos finitos. El programa puede resolver casi todo tipo de problemas, desde un simple análisis lineal hasta simulaciones complejas no lineales. Abaqus posee una extensa librería de elementos finitos que permite modelar virtualmente cualquier geometría, así como su extensa lista de modelos que simulan el comportamiento de una gran mayoría de materiales, permitiendo su aplicabilidad en distintas áreas de ingeniería.

Siguiendo la explicación aplicada a los elementos finitos podemos dividir el trabajo en tres fases principales:

1. El pre-procesado en Abaqus se realiza mediante la aplicación gráfica Abaqus CAE dividido en distintos módulos que permiten definir la geometría, propiedades de los materiales, condiciones de contorno, etc.
2. Para resolver las ecuaciones Abaqus dispone de dos métodos numéricos de resolución, Standar o Explicit. El primero permite estimar el error cometido en cada incremento y se utiliza en problemas en condiciones estáticas y el segundo se emplea generalmente en problemas dinámicos.
3. Para visualizar el resultado final dispone de una herramienta gráfica, Abaqus Viewer, que permite visualizar tensiones, deformaciones, desplazamientos o cualquier otra variable de interés para nuestro problema.

## **5.2.- ENTORNO DE TRABAJO**

---

A continuación se presentan los distintos módulos de que dispone el programa para la resolución de problemas:

### **5.2.1. Módulo *PART***

Se define la geometría de las diferentes piezas que componen la estructura que se quiere analizar. Como “*part*” se entiende a cada una de las entidades geométricas del modelo, estas entidades a su vez se ensamblan en el modelo Assembly. Para la mayoría de los casos se utilizará una “*part*” deformable y sólida. Hay diferentes modos en los que se generará esa geometría, plana, por extrusión o revolución y se dibuja la geometría en una pantalla denominada “*Sketch*” mediante herramientas estándar de dibujo.

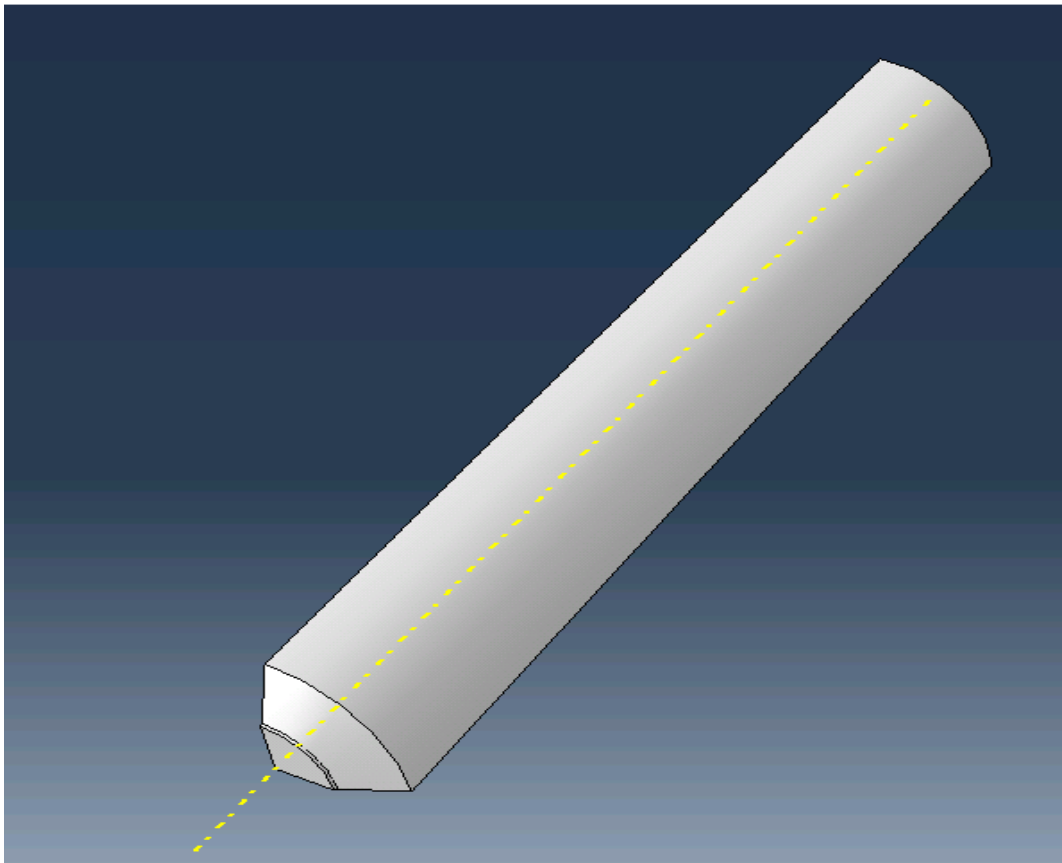


Figura 5.1 “Part” de una probeta utilizada en nuestros ensayos.

### 5.2.2. Módulo **PROPERTY**

Se definen las propiedades de los distintos materiales que forman parte de la estructura y se asignan dichas propiedades a las “*parts*” que se han creado anteriormente. En nuestro problema crearemos y definiremos un material con las propiedades del PMMA y se le asigna a las “*parts*” que sepamos que son de ese material. No se puede asignar directamente un material a una “*part*”, sino que se debe crear una sección con dicho material y ésta asignársela a una “*part*”. La sección ha de ir acorde con el tipo de geometría a la que se quiere asignar.

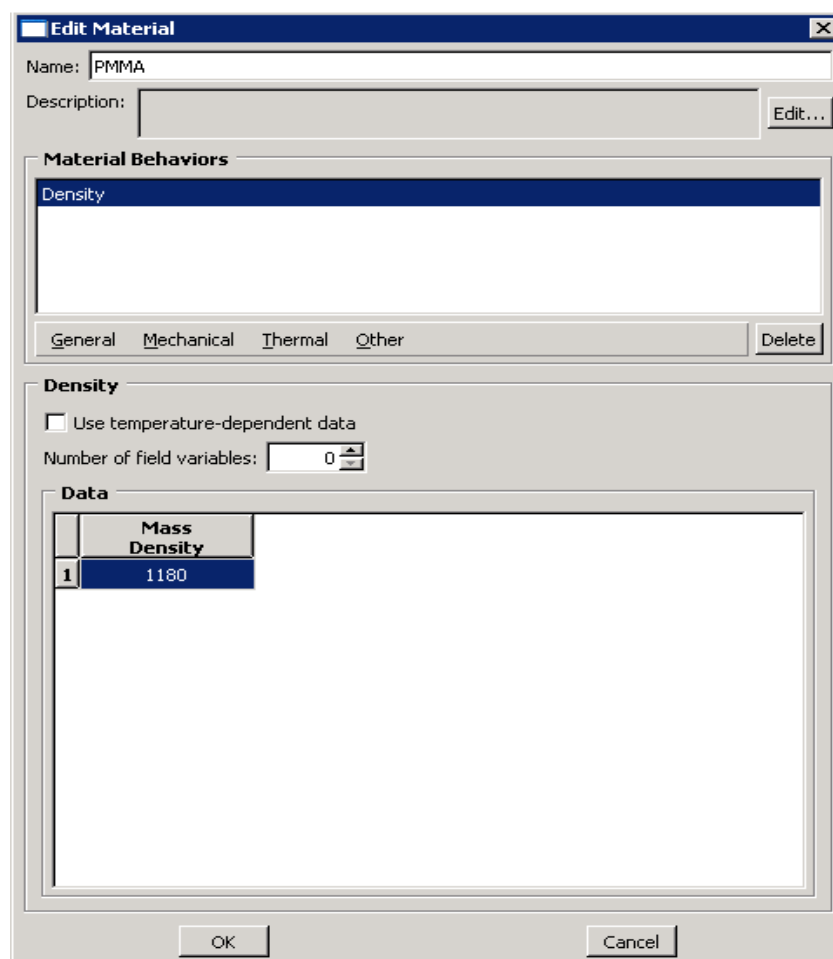


Figura 5.2 Cuadro de diálogo en el módulo PROPERTY para crear un material.

### 5.2.3. Módulo ASSEMBLY

Se ensamblan las diferentes geometrías creadas en el primer módulo y con propiedades asignadas en el segundo. Una “*part*” ensamblada en este módulo se convierte en una “*instance*”. Hay dos tipos de ensamblados, dependent o independent. El primer caso significa que la discretización se realiza sobre la “*part*”, es decir, si hay varias “*instance*” a partir de una *part*, compartirán todas el mismo tipo de discretización, sin embargo; si es del segundo caso se tiene que discretizar cada “*instance*” de manera independiente, como su propio nombre indica.

### 5.2.4. Módulo STEP

Se selecciona el tipo de análisis que se va a realizar sobre el problema. Abaqus utiliza para cada uno de los análisis que realiza un paso (step). Se crea el más adecuado en cada problema, se puede usar uno *Static-General* o bien uno *Dinamic-Explicit*. Hay más posibilidades pero estas son las más habituales en uso en cualquier problema.

### 5.2.5. Módulo INTERACTION

Definen las interacciones entre las diferentes “*parts*” que componen el modelo. Es muy útil en el caso de tener geometrías complejas que unen varias “*parts*” pues así permite mucha variedad de ensamblados. A continuación se observa un ejemplo de contactos entre “*parts*”:

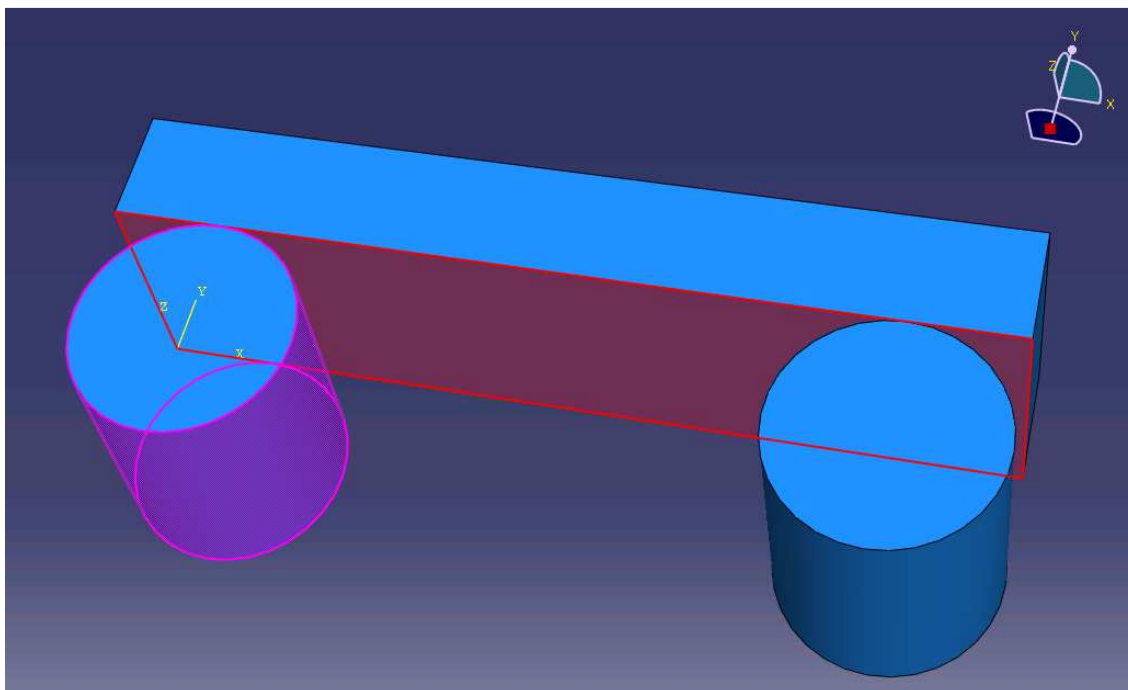


Figura 5.3 Interacción entre las superficies de dos “*parts*”.

### 5.2.6. Módulo LOAD

Aquí se definen tanto las cargas como las condiciones de contorno a las que está sometida la estructura. Cada una irá aplicada a un step o momento en concreto del ensayo. Se pueden aplicar a cualquier geometría de la estructura, si bien, a veces serán necesarias particiones de una “part” para seleccionar la superficie adecuada a conectar.

Normalmente las condiciones de contorno como apoyos, empotramientos, etc. suelen ir definidas en el step inicial o momento inicial del ensayo, y las cargas, que pueden ser mecánicas, eléctricas o térmicas, se establecen el step creado para el desarrollo y solución del problema.

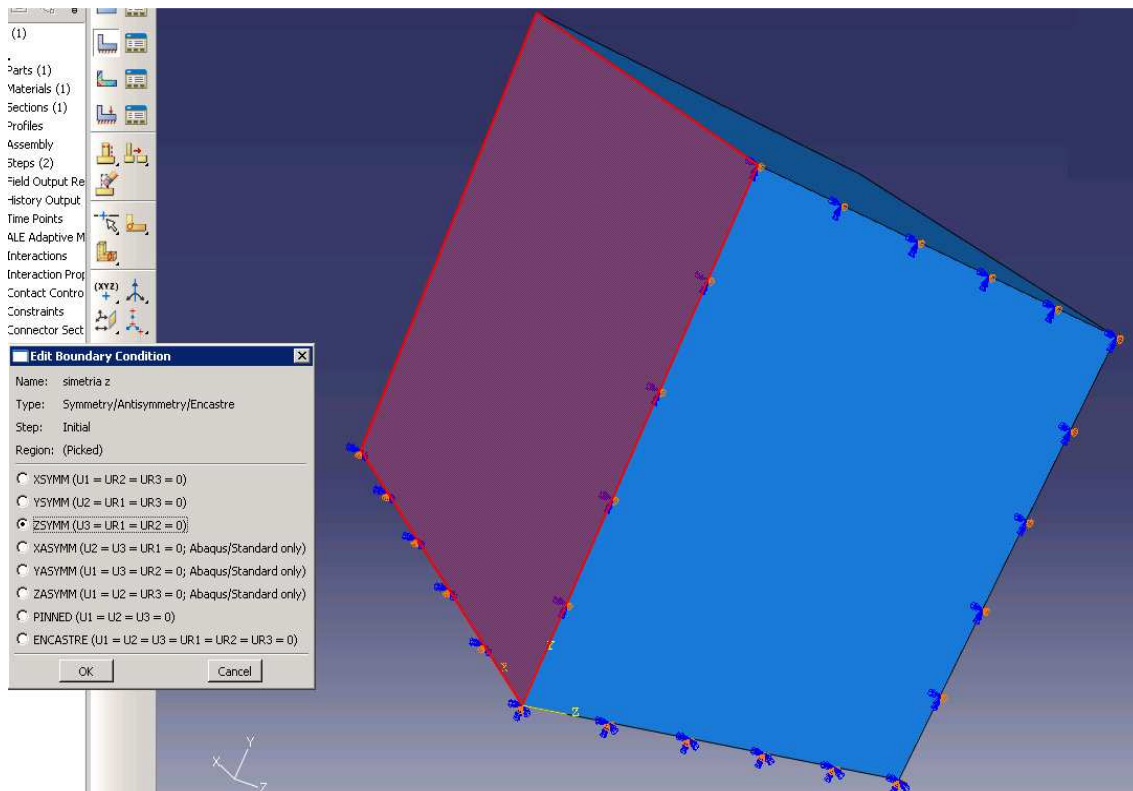


Figura 5.4 Creando condiciones de contorno sobre el cubo en el módulo LOAD.



### 5.2.7. Módulo MESH

En él se define la discretización del problema, es decir, se divide el modelo en una serie de elementos finitos, o lo que es lo mismo, se determina el mallado del modelo. Estos elementos están unidos entre sí por unos elementos llamados nodos, y aquí se permite determinar la posición de estos nodos y así, por tanto, discretizar el modelo.

Cuanto mayor sea el número de elementos que se utilizan para la discretización del modelo mejor es la aproximación a la realidad continua y más correcta es la solución. Si bien llega un punto en el que por más fina que se haga la malla los resultados no varían, es ahí pues donde se debe fijar el punto de equilibrio y se tiene el mallado adecuado del problema, el cuál da los resultados más aproximados en el menor tiempo posible de simulación. Se debe elegir según cada caso si mallamos cada una de las “parts” o bien el conjunto entero ensamblado.

Podemos observar en la siguiente figura que en las zonas más sensibles de la probeta utilizamos un mallado más pequeño, lo que conlleva a una mayor exactitud en la resolución de los problemas.

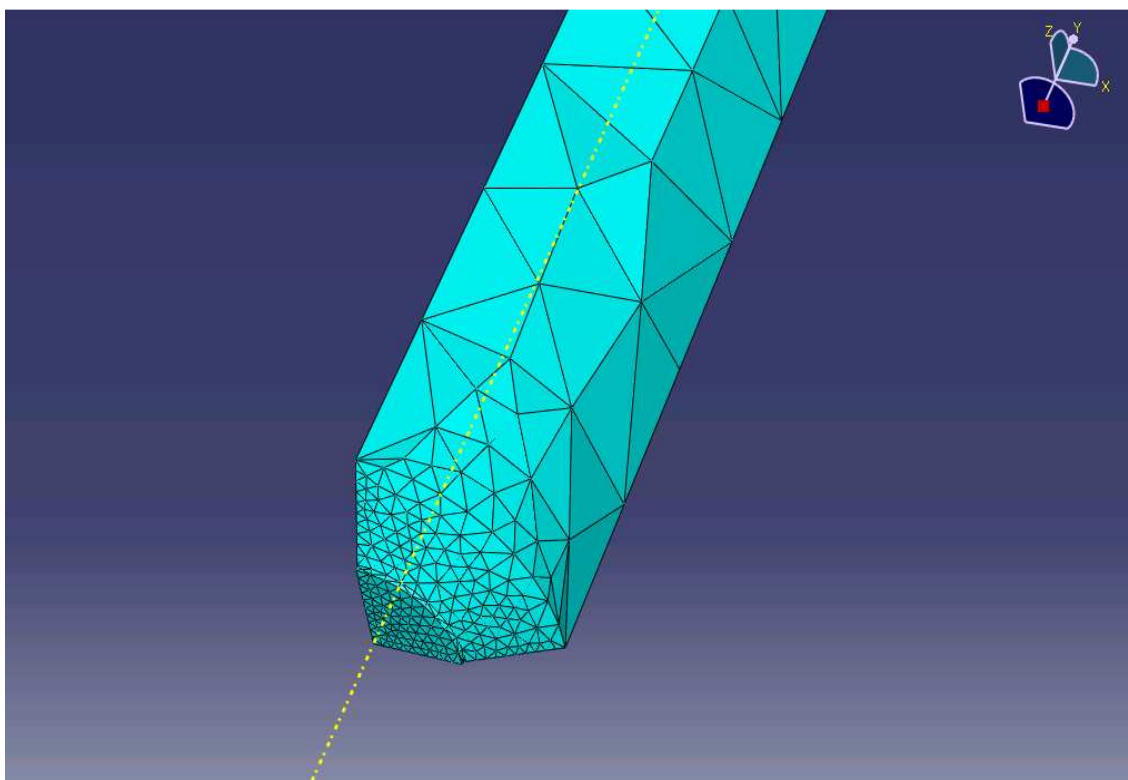


Figura 5.5 Mallado de una probeta.

### 5.2.8. Módulo JOB

Consiste en la herramienta de interacción con el procesador (Standar o Explicit) y con el post-procesador (Abaqus Viewer). Todas las operaciones realizadas anteriormente se guardarán con una extensión cae y hasta que no se utilizan las herramientas del módulo JOB no se generan las ecuaciones que hay que resolver por medio del método de los elementos finitos. Para resolver un problema hay que enviar un archivo de entrada, proceso que se denomina lanzar un caso. Mientras el caso está lanzado permite también saber qué está haciendo el procesador abriendo un monitor en el módulo JOB.

### 5.2.9. Módulo VISUALIZATION

Con extensión .odb, este archivo puede abrirse directamente con este módulo, que consiste en un post-procesador y que puede abrirse también desde el módulo JOB seleccionando el caso lanzado. En él se pueden observar cualquiera de las variables importantes para el problema, como deformaciones, tensiones, desplazamientos, etc.

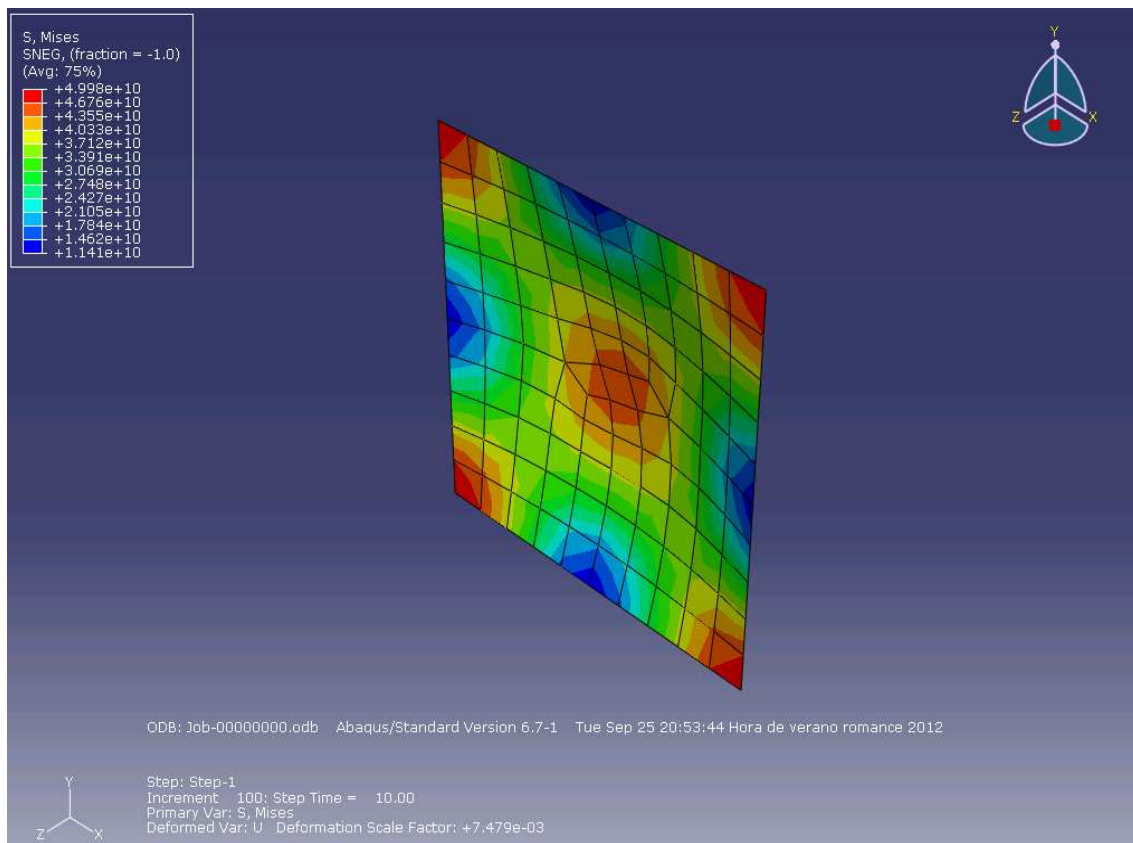


Figura 5.6 Visualización de la tensión de Von Mises en una placa.



## CAPÍTULO 6

---

### TEORÍA DE PLASTICIDAD

## 6.1. TERORÍA CLÁSICA DE PLASTICIDAD

Se empieza aquí con la revisión de la teoría clásica de plasticidad para pequeños desplazamientos, una teoría que describe la relación entre carga y deformación para muchos metales a altas tensiones. Los cambios de temperatura no son considerados en esta sección, aunque sí lo se ve más adelante. Y las ecuaciones constitutivas son independientes del tiempo.

La palabra “plastificar” se debe entender del siguiente modo: una vez superado el nivel de cargas que producen la plastificación del material, el sólido no recupera su forma primitiva al retirar las cargas actuantes, apareciendo en él deformaciones de carácter permanente que se denominan deformaciones plásticas.

Si la tensión a la que se encuentra sometida la barra es inferior a la tensión de plastificación a tracción del material  $\sigma_y^t$ , al retirar la carga, la barra recuperaría su forma original, no existiendo deformaciones de carácter permanente en ella. Sin embargo, si el nivel tensional que se alcanza en la barra fuera superior, y luego se descarga la misma, se observa que la barra ha quedado con una deformación permanente residual  $\epsilon_p$ , que se denomina deformación plástica.

Suponiendo que las propiedades del material del que está fabricado el sólido no dependen del tiempo y que, por tanto, sus relaciones constitutivas son independientes del mismo. Se supone también que no dependen de la temperatura y que el material es homogéneo e isótropo a escala microscópica. En estas condiciones el material no sufre el denominado efecto Bauschinger, ni el efecto de histéresis (al alcanzar un determinado nivel tensional, la barra se descarga totalmente, y, posteriormente, se vuelve a cargar hasta alcanzar la tensión anterior, observándose que la línea de descarga y de recarga forman un lazo denominado lazo de histéresis). Como se ve más adelante no siempre se pueden tomar todas estas simplificaciones a la hora de ver el comportamiento de un material.

Se estudia ahora un caso más general, un sólido sometido a un estado de cargas tal que, el estado tensional en su interior fuera tridimensional. En este caso, podría producirse la plastificación aún permaneciendo cada una de las componentes tensionales por debajo del correspondiente límite elástico del material. Se considera un punto elástico del sólido y se observa bajo qué condiciones se puede asegurar que, dicho punto, ha plastificado o no. Se suponen conocidas todas las componentes del tensor de tensiones en ese punto. Un criterio para esta situación tridimensional debería tener el siguiente aspecto general:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0$$

Si la función  $f$ , denominada función de plastificación, que sería una relación entre las componentes del tensor de tensiones, alcanza un valor nulo en un determinado punto elástico, se puede asegurar que éste ha plastificado.

### 6.1.1. Criterios de plastificación para un material isótropo

En un material isótropo, sus propiedades mecánicas no dependen de la dirección en que se midan. Esto lleva a la afirmación de que no existe, dentro del sólido, ninguna dirección que predomine sobre las demás. Por tanto, un criterio de plastificación, para el caso de un material isótropo, debería venir expresado en función de los invariantes del tensor de tensiones (magnitudes independientes del sistema de referencia que se tome) y no en función de las componentes del tensor en un sistema de referencia en particular. En base a esto, el criterio de plastificación debe tener la siguiente formulación:

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0$$

Donde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son los tres invariantes del tensor de tensiones, garantizándose de esta forma la independencia del criterio de plastificación del sistema de referencia que se tome para expresar las componentes del tensor de tensiones.

Teniendo en cuenta el siguiente tensor de tensiones podremos calcular los tres invariantes del tensor:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_Y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_Z \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \det(\sigma)$$

En el caso de materiales metálicos, se ha comprobado experimentalmente que, el fenómeno de plastificación en un punto, es independiente de la componente hidrostática del tensor de tensiones. Por tanto, en estos materiales el criterio de plastificación debe venir expresado en función de los invariantes  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  de la parte desviadora del tensor de tensiones.

Estos invariantes cuadráticos  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  pueden ser calculados a partir de la parte desviadora del tensor de tensión:

$$[S] = \sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_X - \sigma_H & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_Y - \sigma_H & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_Z - \sigma_H \end{bmatrix}$$

Siendo  $\sigma_H$  la presión hidrostática:  $\sigma_H = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$

Estos invariantes toman las siguientes expresiones:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)]$$

$$J_3 = \det(\sigma')$$

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_y + \sigma_z) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_z) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}$$

Como  $J_1$  es nulo, el criterio de plastificación debería ser de la forma general:

$$f(J_2, J_3) = 0$$

Si el material no muestra poseer el efecto Bauschinger, el límite elástico no cambiaría al cambiar el signo de las tensiones aplicadas. Como que  $J_3$  es función impar de  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ , la función de plastificación no podría depender de este invariante, por lo que, para metales, el criterio de plastificación debe ser del tipo:

$$f(J_2) = 0$$

Como se ve más adelante esta será la simplificación en la que se basa el criterio de plastificación desarrollado por Von Mises.

### **6.1.2. Criterio de plastificación de Tresca**

Se trata de un criterio propuesto en 1868 y que establece que la plastificación de un punto elástico tendrá lugar cuando la máxima tensión tangencial que actúe sobre el punto elástico considerado alcance un valor  $k$ .

Si se admite que las tensiones principales cumplen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la tensión tangencial máxima será  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ; por lo que la plastificación se producirá cuando:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

¿Cómo se puede deducir el valor de  $k$  a partir, por ejemplo, de la tensión de plastificación  $\sigma_y$  obtenida en un ensayo convencional de tracción o compresión?

En este tipo de ensayo, tomando como eje 1 el longitudinal de la barra, la plastificación se produciría cuando:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_y \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \end{aligned} \quad \text{Por lo que: } k = \frac{\sigma_y}{2}$$

### 6.1.3. Criterio de plastificación de Von Mises

Este criterio fue establecido en 1913. Se basa en suponer que la plastificación tiene lugar cuando el segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras es igual al cuadrado de una constante  $k'$  propiedad del material. La expresión de la función de plastificación es la siguiente:

$$J_2 = (k')^2$$

El invariante  $J_2$  se puede expresar en función de las tensiones principales, o de las componentes generales del tensor de tensiones en el punto elástico considerado, resultando las siguientes dos expresiones (que pueden emplearse indistintamente) del criterio de Von Mises:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= 6(k')^2 \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) &= 6(k')^2 \end{aligned}$$

La forma de determinar el valor del parámetro  $k'$  es similar a la que ve para el criterio de Tresca. Al igual que en ese caso, y considerando los resultados de un ensayo uniaxial, se puede observar que cuando se produce la plastificación ( $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), resulta que:

$$2\sigma_y^2 = 6(k')^2 \Rightarrow k' = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Los lugares de plastificación de Von Mises y Tresca son, respectivamente, una circunferencia de radio  $\sqrt{2}k'$  y un hexágono inscrito a dicha circunferencia.

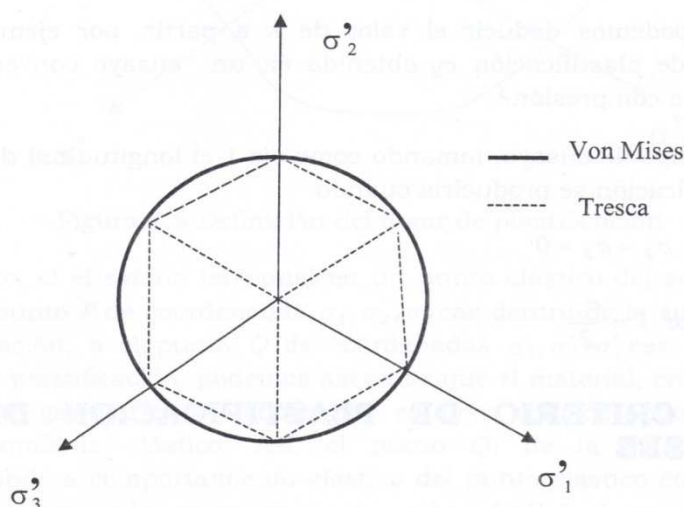


Figura 6.1 Definición de los lugares de plastificación según los criterios de Tresca y Von Mises.



## **6.2. ELECCIÓN DE UNA EXPRESIÓN PARA UN COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO**

En estudios anteriores autores como Kahn y Farrokh [17] y otros menos contemporáneos, pero no se puede parar a nombrarlos todos, trajeron a relucir la importancia de la presión hidrostática en el límite elástico y la ruptura de polímeros.

Como consecuencia, parece que ni el criterio de Tresca ni el de Von Mises son claramente adecuados para describir el comportamiento de los polímeros. Por lo tanto, el modelado del comportamiento plástico convierte a esta en una asignatura de gran interés y se va a proponer varios criterios basados en la teoría clásica de la plasticidad envolviendo la componente hidrostática del tensor de tensiones en ella.

La idea básica que se sugiere consiste en relacionar linealmente la raíz cuadrada del segundo invariante de la tensión desviadora  $J_2$  con el primer invariante de la tensión  $I_1$ . Se cheque más adelante la validez de este criterio aplicando diferentes ensayos de tensión uniaxial en placas de PMMA y se concluye si ofrece una buena descripción de la plastificación del material.

Otros autores como Altenbach and Tushtev [18] propusieron un criterio de fallo en estático basado en la dependencia exponencial de la tensión principal y la tensión equivalente de Von Mises. El criterio es expresado como el ratio entre la tensión en el ensayo de compresión y la del de tracción. Demostraron ser válido únicamente para polímeros con valores bajos en dicho ratio. Recientemente, Wang y Pan [19] propusieron una función isotrópica y no cuadrática para describir el comportamiento y fallo de los polímeros espumosos.

Hay que indicar por tanto, que a pesar de la cantidad de estudios relacionados con la plastificación de los materiales poliméricos, no existe un consenso claro del más apropiado en cada caso, por ellos el objeto de este estudio y obtener alguna clarificación sobre este tema, desarrollando varios criterios y estudiándolos posteriormente para ver cuáles son los más apropiados para el PMMA.

### **6.2.1. Criterio basado en los invariantes de tensiones $I_1$ y $J_2$**

Se propone llevar a cabo una discriminación entre distintos criterios de comportamiento en cortadura, compresión y tracción llevados bajo presión hidrostática. Por lo tanto, se han juntado los valores obtenidos en los experimentos en la zona plástica en el plano ( $I_1/\sigma_{st}$ ,  $J_2/\sigma_{st}$ ), donde  $\sigma_{st}$  es el límite elástico en tracción. Además, el criterio derivado del modelo de Von Mises modificado ha sido estudiado. Su expresión en el plano normalizado meridional se representa como [10]:

$$\left(\frac{\sqrt{3} \cdot J_2}{\sigma_{st}}\right)^n + \frac{m^{n-1}}{m+1} \cdot \left(\frac{I_1}{\sigma_{st}}\right) = \frac{m(m^{n-1}+1)}{m+1}, \text{ donde: } m = \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}$$

Se pueden realizar distintas pruebas y establecer distintos “n”. Denominaremos MMC al criterio que utiliza un “n=1” y MMP al criterio que utiliza un “n=2”.

Donde  $\sigma_{st}$  es el límite elástico en tracción uniaxial y  $\sigma_{sc}$  es el límite elástico en compresión uniaxial. La introducción del parámetro “m” en la función del polímero viene dada por el hecho de que las tensiones a tracción y a compresión no son iguales debido a la composición de los enlaces covalentes existentes en los polímeros, lo que les hace más resistentes a compresión que a tracción. Para su obtención se requiere llevar a cabo ambos ensayos a tracción y compresión. En este caso se toman los datos obtenidos previamente con el modelo de Forquin y Nasroui [9] para los ensayos de compresión y se supone un valor constante de “m” que permite obtener los valores para el ensayo a tracción. En posteriores ensayos se prueba también con otros valores para “m”.

Esta última suposición es posible llevarla a cabo debido a que el parámetro m es independiente de la temperatura, no está influenciado por la velocidad de deformación y es independiente también de la masa molecular de nuestro polímero utilizado. Por tanto independientemente de las condiciones en las que se realice el ensayo, la relación entre ambos valores, tracción y compresión, será siempre la misma.

Según ensayos realizados por Ghorbel, ninguno de los dos criterios predice el comportamiento viscoplástico de todos los polímeros termoplásticos cuando son sujetos a cualquier estado de tensiones biaxial. Parece que los polímeros que se deforman homogéneamente como el PMMA obedecen más al criterio MMP, y los que se deforman heterogéneamente como el PC obedecen al criterio modificado de presión de Tresca. En otros casos, como el PS, parecen responder indistintamente a un criterio u otro en función de parámetros externos como la temperatura.

Por consiguiente se puede decir que el MMP criterio describe bien el comportamiento de polímeros especialmente para altos valores de presión hidrostática. Sin embargo, no permite predecir la descripción del comportamiento cuando la deformación principal ocurre con presión hidrostática baja (“shear banding”).



En cada uno de los estudios posteriores se observa cuál de los dos criterios es más aplicable al PMMA, puesto que se analiza la sensibilidad del primer invariante variando el exponente “n”.

Una comprobación a la validez de este criterio podría ser utilizando un valor de  $m=1$ , que correspondería con un caso de tracción simple, se observa en nuestra expresión, dónde se irían todos los términos en los que “m” aparece, que se obtiene la expresión del criterio de Von Mises basado precisamente en esto, un ensayo uniaxial.

### 6.2.2. Criterio basado en los invariantes de tensiones $I_1$ , $J_2$ y $J_3$

Con el fin de mejorar la predicción para los polímeros isotrópicos bajo cualquier rango de estados de tensiones biaxial y para establecer un criterio de comportamiento general que represente la cortadura, se propone incluir el tercer invariante del desviador de tensiones  $J_3$  en la expresión  $f$ .

Eldman y Drucker (1951) ya propusieron introducir una combinación del segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones en la función de comportamiento para expresar mejor los resultados obtenidos en test a metales isotrópicos.

La introducción de  $J_3$  en el criterio de plastificación significa que la tensión, necesaria para activar los procesos responsables del comportamiento plástico, es más baja en cortadura que en tracción o en compresión. Para las aleaciones de metales, expresará que el número de deslizaciones de las dislocaciones que deberían ser activadas son más débiles en cortadura. Para los polímeros, significa que la fuerza necesaria para activar la movilidad intermolecular e intramolecular son más importantes en compresión y tracción que en cortadura. Para justificar la presencia de cada invariante Lee y Ghosh (1996) argumentaron que si los polímeros son expuestos a torsión, la deformación envuelve tanto a cortadura como a rotación, por lo tanto, tres mecanismos básicos de deformación suceden en los polímeros: dilatación caracterizada por  $I_1$ , cortadura pura caracterizada por  $J_2$  y rotación caracterizada por  $J_3$ . Así pues, estos tres invariantes han sido introducidos en las leyes constitutivas para describir completamente el comportamiento mecánico de los polímeros.

Se ha descrito en el apartado anterior el criterio MMP que daba los mejores resultados para situaciones en las que se tenían altos valores de presión hidrostática pero no permite describir el comportamiento cuando la deformación principal está emparentada con una presión hidrostática baja (shear banding). Por lo tanto, se propone extender el criterio MMP y establecer una superficie de comportamiento única, llamada SMP, introduciendo el tercer invariante  $J_3$ . La expresión resultante se escribe como sigue [10]:

$$f = \left( \frac{3 \cdot J_2}{\sigma_{st}} \right)^2 \cdot \Psi(J_2, J_3) + (m - 1) \cdot \left( 1 - \frac{k_0}{8} \right) \cdot \frac{I_1}{\sigma_{st}} - \left( 1 - \frac{k_0}{8} \right) \cdot m$$

donde,

$$\Psi(J_2, J_3) = \left( 1 - \frac{27}{32} \cdot k_0 \cdot \frac{J_3^2}{J_2^3} \right), \quad J_3 = \frac{1}{3} \cdot \text{tr}(\underline{\underline{S}}^3), \quad J_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{tr}(\underline{\underline{S}}^2),$$

$$k_0 = \left( 1 - \frac{r^2}{m} \right), \text{ y } r = \frac{\tau_0 - \exp}{\sigma_{st}}$$

Para reducir el número de test necesarios a la hora de identificar los parámetros del criterio sugerido SMP, se propone simplificarlo tomando  $k_o=1$ , lo cual no afecta a la convexidad de la función  $f$ .

Por lo tanto, la expresión final para el criterio de plastificación propuesto será como sigue:

$$f = \left( \frac{3 \cdot J_2}{\sigma_{st}} \right)^2 \cdot \Psi(J_2, J_3) + (m - 1) \cdot \frac{I_1}{\sigma_{st}} - m, \text{ con } \Psi(J_2, J_3) = \frac{8}{7} \left( 1 - \frac{27}{32} \cdot \frac{J_3^2}{J_2^3} \right)$$

Por tanto, según conclusiones sacadas en los experimentos por Ghorbel, el criterio MMP ( $n=2$ ) y el propuesto o SMP predicen la misma tensión cuando los polímeros son probados a tensión o a compresión bajo varias presiones hidrostáticas.

El criterio propuesto permite buenas predicciones de las tensiones en estado plástico para polímeros que se deforman relativamente homogéneamente como el PMMA y también para algunos que no se deforman homogéneamente como el PC. Para otros como el PS, este criterio no es tan acertado, ya que depende de las condiciones del experimento.

Por tanto, comparados todos los criterios, se concluye que el MMP es acertado especialmente para polímeros bajo condiciones de alta presión hidrostática. Más adelante se ha introducido el parámetro  $m$  y se ha observado que era independiente de la temperatura y la velocidad de deformación. Y finalmente para mejorar la predicción del método anterior se ha introducido el tercer invariante desviador en él.

Mediante las simulaciones o estudios posteriores se observará la influencia que sobre el PMMA tienen los invariantes del desviador de tensiones y se validarán estos modelos propuestos, así como alguno contrastado como es el de Von Mises a fin de establecer cómo se ajustan al comportamiento del material.

A continuación se observa gráficamente la predicción obtenida por Ghorbel de los modelos para diferentes polímeros:

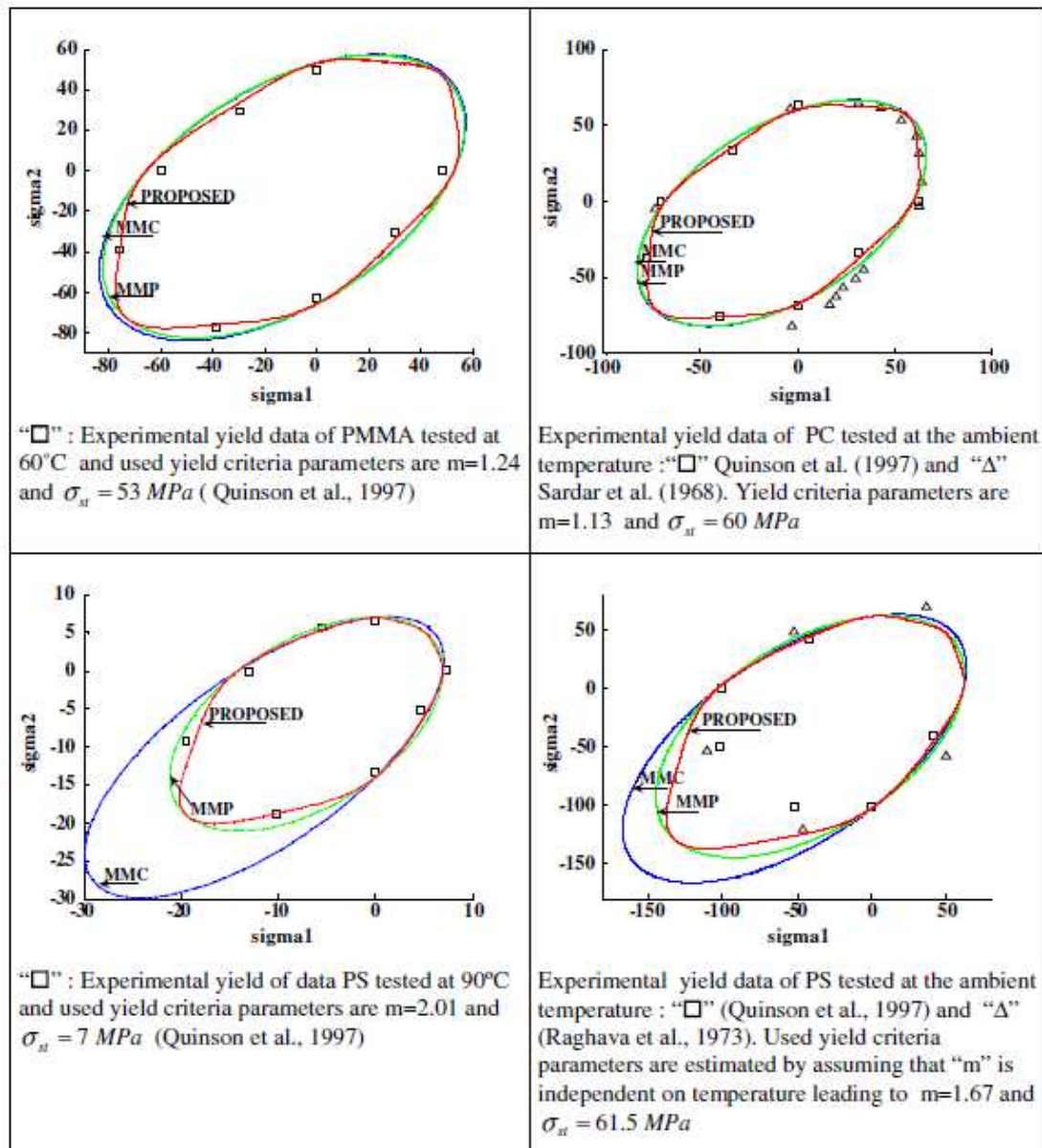


Figura 6.2 Comprobación experimental de los modelos propuestos para diferentes polímeros [10].



## CAPÍTULO 7

---

### SUBROUTINA



## **7.1. UTILIDAD DE LA SUBROUTINA**

---

Para entender la inclusión de una subrutina para la resolución de las distintas simulaciones primero hay que entender cómo funciona Abaqus para la resolución de los problemas.

Cuando se quiere resolver un problema, o realizar un ensayo con Abaqus se le dan las distintas características del material o materiales a simular y Abaqus devuelve cómo respuesta los tensores de tensiones y deformaciones (todas las componentes en tres dimensiones) en función del tiempo del ensayo. Es decir, va a ir dando un tensor por cada intervalo de tiempo  $t$  que esté establecido en la simulación, ya sea cuasi estático o dinámico el problema.

Primeramente el programa calcula las deformaciones producidas en todos los nodos en cada instante de tiempo y mediante ecuaciones internas calcula a partir de ellas el tensor de tensiones en cada nodo en cada instante de tiempo. Esto lo realiza sin problemas para ensayos elásticos o de plasticidad aplicando el criterio de Von Mises, pero cuando se requiere un criterio más restrictivo o con mayor complejidad en el que también entran a formar parte otros parámetros como la temperatura o el efecto de otros invariantes, como son los ejemplos a simular en este proyecto, Abaqus no tiene estas ecuaciones intrínsecas y por tanto no puede resolver el problema.

Así pues, Abaqus dispone de una opción en el módulo JOB, en el que se lanzan los casos a resolver, en el que puedes incluir una subrutina, que no es otra cosa que un archivo programable en el que se incluyen todas las ecuaciones que influirán en el comportamiento del material y los criterios de plastificación más evolucionados y actuales, lo que supone un modelo constitutivo de comportamiento del material.

Una vez incluida la subrutina que servirá para resolver los problemas, lo que Abaqus calcula en cada intervalo de tiempo son las deformaciones que se producirán en cada simulación y a través de la subrutina podrá calcular el tensor de tensiones también para cada intervalo  $t$  y así sucesivamente utilizando los valores conocidos de  $t_0=0$  pasa al  $t_1=\Delta t$ . Los valores de las tensiones los calculará pues teniendo en cuenta que no sólo son función de la deformación, sino también de otros parámetros como la velocidad de deformación y la temperatura del ensayo. Además de los criterios de plastificación explicados en el capítulo 6, en el apartado siguiente se introducen las ecuaciones constitutivas del material necesarias para el desarrollo de cada una de las simulaciones y que han sido incluidas en la subrutina.

Existen varios tipos de subrutina para Abaqus, aquí se utiliza un tipo de subrutina que es el denominado *UMAT*, que es válido para definir el comportamiento del material en Abaqus Standard, o lo que es lo mismo, a bajas velocidades de deformación o cuasi-estático, es un tipo de subrutina que sustituirá el comportamiento del material en el módulo “*property*”, en vez de seguir el típico criterio de Von Mises para plasticidad.



Como ya se ha dicho estas subrutinas permiten incluir cualquier modelo constitutivo de cualquier naturaleza o complejidad en ellas, ya sea para elementos estructurales complejos, diferentes condiciones de carga, cargas térmicas, condiciones de contacto entre superficies o con fricción, etc.

También gracias a la utilización de este tipo de interfaz para el programa, se permite definir dentro de ellas todas las variables de salida que se deseen conocer, y no únicamente las que vienen por defecto en el módulo de visualización de Abaqus.

En el siguiente apartado se recogerán las ecuaciones constitutivas que se incluyen en la subrutina desarrollada para la resolución de problemas, así como también van incluidas en la misma el comportamiento plástico del material estudiado en el capítulo 6.

Un esquema que podría ejemplificar el funcionamiento de la subrutina y lo que se obtiene a partir de ella podría ser el siguiente:

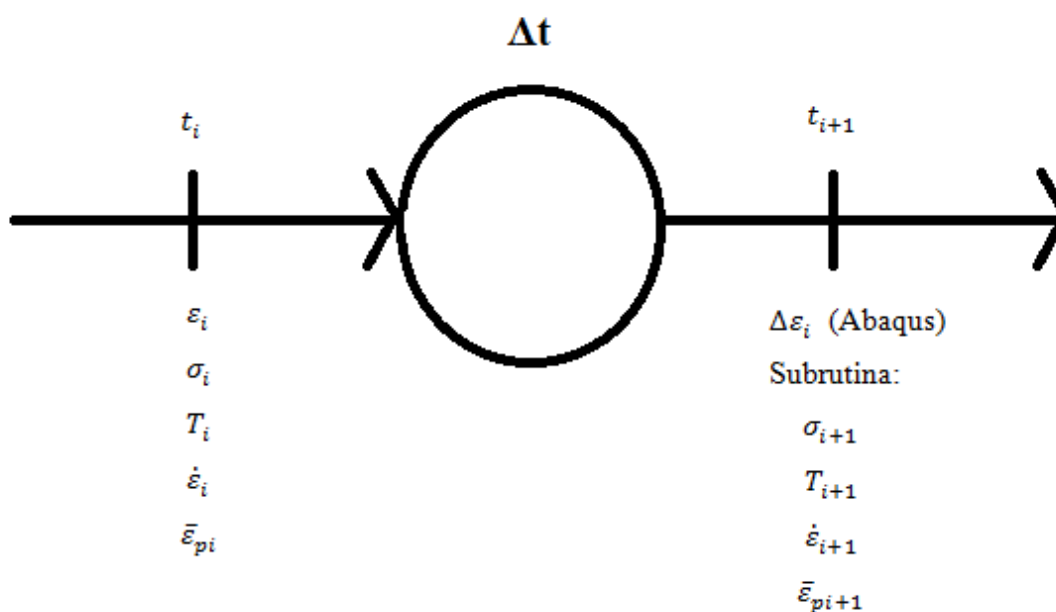


Figura 7.1 Esquema del paso dentro de la subrutina.

## 7.2. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DEL PMMA

Debido al importante efecto que ejerce la velocidad de deformación y la temperatura inicial en el comportamiento termoelastoplástico del PMMA, Forquin [9] propone la siguiente expresión para calcular la tensión en compresión:

$$\sigma_{eq}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, P) = \left(1 - \frac{T}{T_g}\right) (1 - \exp(-w\varepsilon)) \left[ \sigma_1 \exp(-b\varepsilon) \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{01}}\right)^{m_1} + \sigma_2 \exp\left(\left(h_0 + h_1 \frac{T - T_{ref}}{T_{ref}}\right)(\varepsilon^2)\right) \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{02}}\right)^{-1}\right)^{-m_2} \right]$$

Dónde  $T$  y  $T_g$  son la temperatura absoluta y la temperatura de transición vítrea respectivamente.  $T_{ref}$  es la temperatura de referencia, tomada igual a 298K,  $\varepsilon$  es la velocidad de deformación, y  $\dot{\varepsilon}$  es la de referencia tomada igual a 0.1s. El resto de parámetros se obtienen experimentalmente y están recogidos en la tabla posterior.

Es necesario recordar que  $m = \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}$ , y la  $\sigma_{eq}$  que se calcula con la expresión anterior es la de compresión.

A partir de ésta es capaz de obtener también la tensión en tracción con la relación anteriormente estudiada del parámetro “m” que combina ambas tensiones. Como se ha comentado anteriormente el parámetro “m” se considera constante con respecto a la temperatura y la velocidad de deformación, lo que nos permitirá obtener ambas tensiones para cada condición de ensayo.

Hay que recordar que la validez de este modelo ha sido probada para ensayos a compresión y con velocidades de deformación bajas, es decir, cuasi estáticos, pero en este caso se va a extrapolar también a ensayos en tracción. Al igual denota incongruencias en cuanto se introduce temperaturas iniciales bajas, de ahí que se vaya a utilizar en ensayos con temperaturas a partir de 273K.

Los valores de los parámetros que aparecen en la ecuación anterior han sido obtenidos experimentalmente por Forquin [9] y son los siguientes:

$T_g(k)$	$w$	$\sigma_1(mpa)$	$b$	$\sigma_2(mpa)$
378	14,079	1550	12,09	605

$h_0$	$h_1$	$\dot{\varepsilon}_{01} (s^{-1})$	$m_1$	$m_2$	$\dot{\varepsilon}_{02}(s^{-1})$
0,9	1,655	0,1	0,125	0,071	0,1

## 7.3 OTRAS ECUACIONES DE IMPORTANCIA

### 7.3.1. Tensor de tensiones

Se parte de la Ley de Hooke para un caso elástico y se extrapola al caso plástico más el efecto de la temperatura y se obtiene el tensor de tensiones a partir de la deformación total menos la plástica y menos la producida por el efecto térmico.

Caso elástico:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Caso elástico más plástico:

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p)$$

Caso elástico más plástico y con variación térmica:

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_\theta)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - E \cdot \varepsilon_p - E \cdot \varepsilon_\theta$$

$$\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon - E \cdot \Delta\varepsilon_p - E \cdot \Delta\varepsilon_\theta$$

$$\sigma = \sigma_{t-1} + E \cdot \Delta\varepsilon - E \cdot \Delta\varepsilon_p - E \cdot \Delta\varepsilon_\theta$$

Si se lleva la expresión y se convierte en las tres dimensiones utilizando ecuaciones de las leyes de Hooke generalizadas:

$$\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{yy}^e = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \quad \varepsilon_{yz}^e = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{zz}^e = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \quad \varepsilon_{xz}^e = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xz}$$

Siendo E el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

En forma matricial las leyes de Hooke se expresa de la siguiente manera en su forma inversa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \varepsilon_{zz}^e \\ \varepsilon_{xy}^e \\ \varepsilon_{xz}^e \\ \varepsilon_{yz}^e \end{pmatrix}$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión generalizada para el tensor de tensiones en plasticidad:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{trial} - \underline{\underline{C}} : \underline{\Delta \epsilon}^p - \underline{\underline{C}} : \underline{\Delta \epsilon}^\theta$$

Representando  $\underline{\underline{C}}$  la matriz que relaciona el tensor tensiones con el tensor deformaciones.

### **7.3.2. Equivalencia del trabajo plástico**

Realizando la hipótesis de equivalencia de trabajo plástico en el material homogeneizado, se obtiene la relación [16]:

$$\underline{\sigma} : \underline{\Delta \epsilon}^p = f \cdot (\epsilon_p - \epsilon_p^{t-1})$$

Donde  $f$  es igual a  $\sigma_c$  si  $I_1$  es menor de cero e igual a  $\sigma_t$  si  $I_1$  es mayor que cero.

### **7.3.3. Balance de energía**

La expresión que nos indica la cantidad de variación de trabajo plástico que se transforma en calor, que sirve por tanto para calentar las diferentes probetas es la siguiente:

$$\rho \cdot c_p \cdot \Delta T = \chi \cdot (\underline{\sigma} : \underline{\Delta \epsilon}^p)$$

Siendo  $\chi$  el coeficiente de Taylor-Quinney, un valor constante que va de 0 a 1, según sea la proporción de trabajo que se convierte en calor, siendo 0 cuando no se calienta la probeta o 1 cuando se utiliza todo ese trabajo para calentarla.



## CAPÍTULO 8

---

### DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES

## 8.1. ESTUDIO PARAMÉTRICO

En primer lugar se simulan varios ensayos, mediante la herramienta de elementos finitos mencionada anteriormente, de tracción y compresión sobre una probeta de forma cúbica de  $1 \times 1 \times 1$  mm y en ellos se estudian el comportamiento del material (PMMA) y la influencia que sobre él ejerce si variara la velocidad de deformación del mismo, la temperatura del ensayo, el coeficiente de dilatación del material o el coeficiente de Taylor-Quinney.

El objetivo será obtener una curva con la tensión que sufre el material en función de la deformación del mismo, a fin de ver cómo varía dicha tensión en función de los valores que se dan a cada uno de los parámetros mencionados anteriormente.

A fin de simplificar el modelo; aunque en el caso de un cubo sólo lleva a obtener una probeta más pequeña, en casos posteriores sí será más útil; se aplica en la probeta simetría en cada uno de los ejes. Además de poder simplificar el modelo, no en este caso, aplicar simetría en las caras sirve también como una manera de empotrar el modelo y fijarlo ya que no dispone de sujeciones. Y aunque no sería necesario definir las, Abaqus resolvería igual el ensayo, van a aportar una mayor precisión en la obtención de resultados ya que se evita el hecho de que se pudiera desplazar la probeta, algo que no ocurrirá en este caso. Esto también ayudará a la rapidez con que se resuelven los problemas con Abaqus, ya que un modelo más sencillo y pequeño tarda menos en correr que uno grande y complicado debido a disponer de una malla menor con menor número de nodos.

A continuación aparece en rojo el cubo que realmente se diseña en Abaqus de  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  mm y sombreadas las caras donde se aplican las simetrías “x”, “y” y “z”:

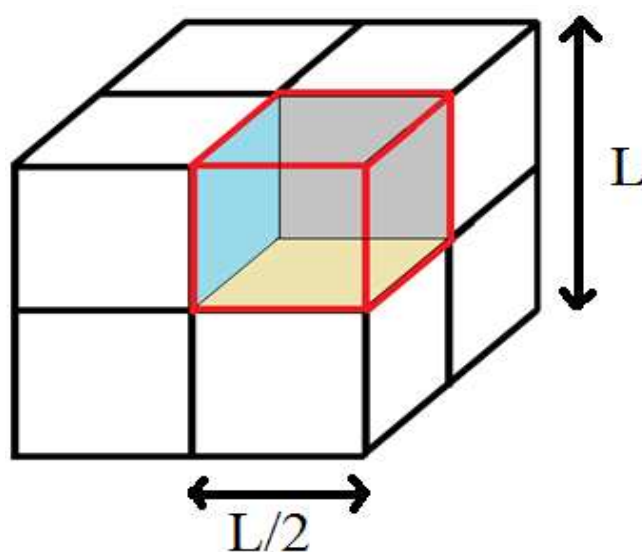


Figura 8.1 Simetrías en la probeta cúbica utilizada.

Para realizar los ensayos, tanto de compresión como de tracción, lo que se hace es aplicar un desplazamiento, en este caso en la cara de arriba que no tiene simetría del cubo, de un valor  $\Delta l/2$ ; siendo  $\Delta l$  igual a:

$$\Delta l = \dot{\epsilon} \cdot T \cdot L$$

Siendo  $\dot{\epsilon}$  la velocidad de deformación utilizada para cada ensayo, T el período de ensayo y L la longitud del lado del cubo (1mm). Se dispone de distintos valores según se requiera que el ensayo sea cuasi estático o dinámico.

El desplazamiento aplicado en el cubo tiene el siguiente significado físico puesto que se aplica a lo largo de un tiempo T:

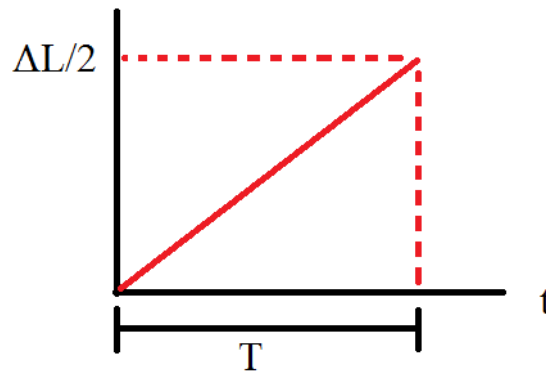


Figura 8.2 Desplazamiento en las probetas en función del tiempo.

Además de estudiar la influencia de la velocidad de deformación en varios casos cuasi estáticos, después se establece una velocidad de deformación fija y se cambian el resto de parámetros del problema, los mencionados temperatura, coeficiente de dilatación y coeficiente de Taylor-Quinney.

Los valores con los que se trabaja en los distintos ensayos están recogidos en la siguiente tabla:

Parámetro	Valores de simulación		
Coeficiente de Taylor-Quinney ( $\gamma$ )	0.3	0.8	
Coeficiente de dilatación térmica ( $\alpha$ )	7e-05	7e-03	
Temperatura (T) en Kelvin.	260	300	350



Además de lo mencionado anteriormente se llevará a cabo un ensayo característico en el que se podrá observar cómo se comporta el material en caso de influencia o no de la variación de temperatura, es decir, se observa si influye el que se caliente la probeta o no en el comportamiento del material. Esto se llevará a cabo dando valor nulo tanto al coeficiente de dilatación como al coeficiente de Taylor-Quinney, haciendo cero por tanto la ecuación del balance de energía, es decir, que no se transmite calor a la probeta.

Basándonos en el modelo creado en Abaqus, se varían las características anteriores dentro de la subrutina con la que se corren los casos y así se utiliza el mismo modelo para todos los casos. Lo mismo ocurrirá en los dos estudios siguientes, todas las características del modelo están incluidas dentro de la subrutina. Lo único que se debe variar fuera de la subrutina es el desplazamiento de la probeta en los casos de diferente velocidad de deformación o en el sentido de la misma si el caso es de tracción o compresión.

Como resultado de estos ensayos se obtienen unas curvas en las que se observa la tensión en función de la deformación, así se puede determinar cómo influyen cada uno de los parámetros en las distintas gráficas de plasticidad.



## 8.2. ESTUDIO DE INFLUENCIA DEL INVARIANTE $I_1$

Para analizar la influencia que tiene el invariante  $I_1$  sobre el valor de la tensión en el material en función de su deformación se realizan varias simulaciones a compresión sobre el modelo de probeta siguiente:

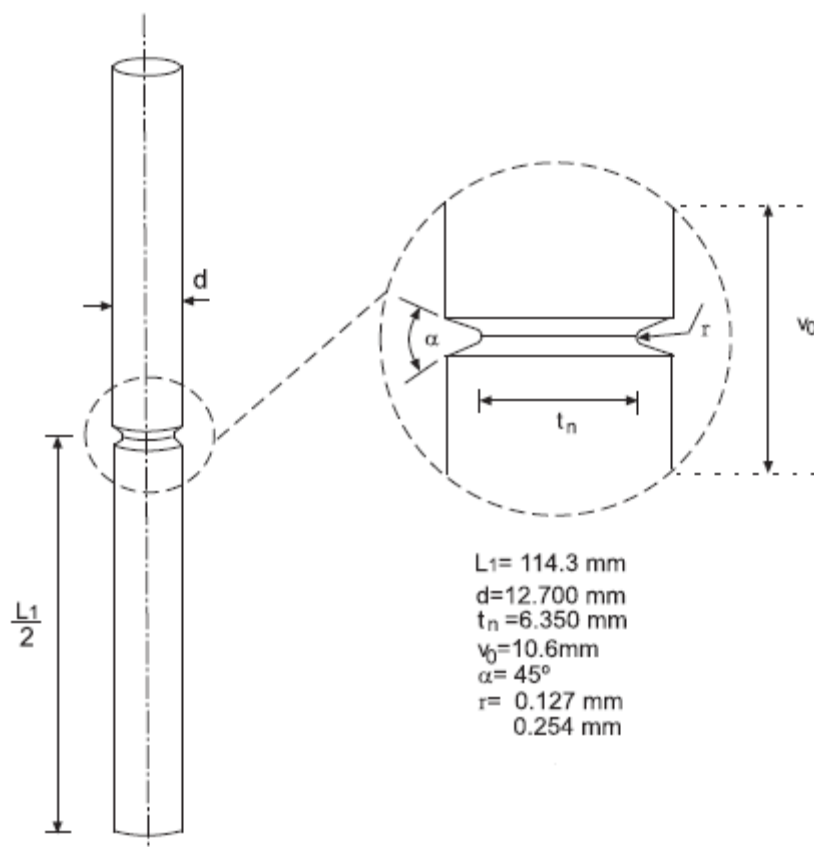


Figura 8.3 Modelo de probeta utilizado en las simulaciones para estudiar influencia del invariante  $I_1$  [13].

Al igual que en el caso anterior se puede simplificar y a la vez empotrar el modelo aplicando simetría en él. Se ve claramente que existe una simetría en el eje “y” y como la probeta es cilíndrica se puede coger un cuarto del cilindro y aplicar también simetría en “x” y “z”. En este caso a diferencia del anterior, sí que se simplifica bastante el modelo y es más sencillo de diseñar por su gran tamaño, además de las ventajas anteriormente explicadas en cuanto al desarrollo del problema en Abaqus.

Como se observa en los datos del modelo se van a realizar los ensayos sobre dos probetas iguales pero en las que varía el radio de la entalla que hay en el cuello de la probeta.

Para realizar las simulaciones se define en Abaqus un desplazamiento siguiendo la relación expuesta en el primer apartado de este capítulo teniendo en cuenta una vez más que existe simetría en el eje y de la probeta, por lo que el desplazamiento a aplicar será la mitad del calculado.

Para estudiar la influencia del primer invariante se varían los términos “n” y “m” de la siguiente expresión estudiada en el capítulo 6.2.1:

$$\left(\frac{\sqrt{3} \cdot J_2}{\sigma_{st}}\right)^n + \frac{m^{n-1}}{m+1} \cdot \left(\frac{I_1}{\sigma_{st}}\right) = \frac{m(m^{n-1}+1)}{m+1}, \text{ dónde: } m = \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}$$

Los valores en los que se estudia esta influencia son los siguientes:

Parámetro	Valores de ensayo		
Coefficiente “m”	1	1.2	1.4
Exponente “n”	1	2	

En los resultados de estos ensayos se obtienen la fuerza aplicada en las probetas en función del desplazamiento de las mismas y se observa cómo influyen estos términos en las curvas obtenidas. Se observa en concreto qué fuerza se produce sobre la entalla de la probeta, debido a que el resto de la probeta se comportará de una manera cuasi elástica.

El por qué del uso de este tipo de probetas se basa en la concentración de tensiones que se producen en la entalla de la probeta. Esto supone un aumento en el valor de la tensión que se registra en esos puntos como es sabido y explicado en el capítulo 6, el invariante  $I_1$  es igual a la suma de las tensiones en los tres ejes principales, por lo tanto aumentará el valor de  $I_1$ . De ahí que se elija esta probeta para estudiar la influencia de este parámetro en el comportamiento plástico del material.

### 8.3. ESTUDIO DE INFLUENCIA DEL INVARIANTE $J_3$

A fin de analizar ahora la influencia del invariante  $J_3$  en el comportamiento termoelastoplástico del material se realiza una serie de simulaciones únicamente de compresión esta vez sobre un modelo de probeta como el siguiente:

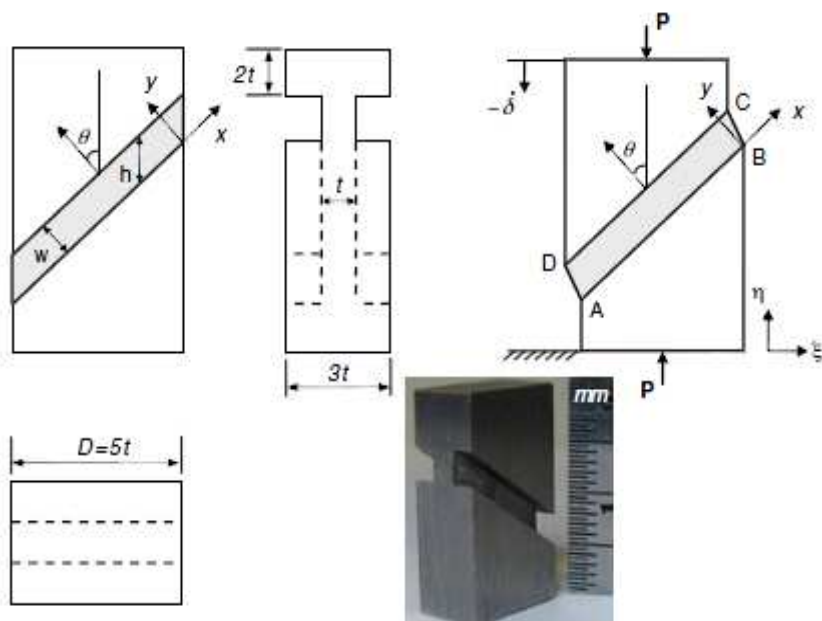


Figura 8.4 Modelo de probeta utilizado en las simulaciones para estudiar influencia del invariante  $J_3$  [14].

En esta probeta debido a su complejidad, únicamente se puede aplicar simetría en el eje “x”. En este caso, dicha simetría no proporciona simplicidad en el modelo, pero si podemos aprovechar para sujetar la probeta al menos en uno de sus ejes y además ganar tiempo a la hora de realizar los ensayos, pues así tardan menos en correr.

Para estudiar este caso se desarrolla sobre tres probetas con el diseño que aparece arriba, pero en las que se van a cambiar el ángulo de la entalla con la vertical a tres valores diferentes  $30^\circ$  y  $45^\circ$ . Este ángulo corresponde al  $\theta$  del modelo. Para mantener las relaciones que se observa en el modelo de la base de la probeta y de la entalla en la misma, al cambiar el valor del ángulo se debe tener probetas de diferente altura, siendo respectivamente de 31mm y 38mm para los ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .

Para realizar las simulaciones, ésta vez únicamente de compresión, se aplicará un desplazamiento siguiendo la relación expuesta en el primer apartado de este capítulo, esta vez teniendo en cuenta que no existe simetría en el eje y, por lo que se introducirá el desplazamiento completo calculado.

Para estudiar la influencia del tercer invariante en los criterios de plastificación se prueban incluyendo en la ecuación de plastificación el término en el que influye  $J_3$  (estudiado en el capítulo 6.2.2):

$$\Psi = \frac{8}{7} \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{27 J_3^2}{4 J_2^3} \right) \right)$$

Los valores con los que se estudia este efecto son con  $\Psi$  igual a 1 o igual a la expresión anterior. Como se puede observar cuando el valor sea 1, el término  $\Psi$  no afecta a la plastificación, entonces no influiría el término  $J_3$  (tercer invariante). Cuando tenga un valor de la expresión, que va desde 1 hasta 1'14, el tercer invariante tendrá influencia en los resultados y se observa qué efectos tiene sobre el valor de la fuerza aplicada en función del desplazamiento de la probeta en la zona de entalla que será donde se produzca la concentración mayor de tensiones.

La siguiente expresión nos introduce el parámetro  $\theta$  conocido como el “Ángulo de Lode”:

$$\cos^2(3\theta) = \left( \frac{27 \cdot J_3^2}{4 \cdot J_2^3} \right)$$

Este valor se supone mayor cuanto mayor sea el ángulo que forman las fuerzas aplicadas en la probeta con el ángulo de la entalla, esto explica el por qué se varía en este caso la probeta utilizada y se buscan resultados con entallas con diferentes ángulos con la vertical, si la entalla fuera totalmente horizontal, no influiría el invariante  $J_3$  en el comportamiento plástico del material.



## CAPÍTULO 9

---

### RESULTADOS



## **9.1. SIMULACIONES PREVIAS CON CRITERIO DE VON MISES**

---

En este apartado se van a realizar una serie de simulaciones previas con una probeta cúbica, que se utiliza más tarde para el cálculo de sensibilidad paramétrica, para calcular cómo sería el comportamiento plástico del material según el criterio de Von Mises.

Para ello se utilizan también los valores obtenidos con la ecuación constitutiva del material para introducir los valores de tensión y deformación que necesita el programa para realizar la simulación. Se realizan varios ensayos a tracción y compresión, y se estudia la influencia de la velocidad de deformación y la temperatura inicial en la deformación plástica equivalente del material.

Tal y como se ha explicado en la literatura de este proyecto, la ecuación constitutiva del material sólo ha sido probada para bajas velocidades de deformación, ensayos cuasi estáticos y de compresión, pero se extrapola para realizar también simulaciones a tracción y con velocidades de deformación elevadas a fin de estudiar también la influencia de estos dos parámetros, velocidad de deformación y temperatura inicial, sobre la tensión que se produce en el material, el PMMA.

En este caso se van a realizar los ensayos únicamente sobre una probeta de forma cúbica, debido a su sencillez de diseño y que facilita la obtención de resultados, así como la rapidez de obtención de los mismos por reducir el número de nodos necesarios en el mallado de la pieza. Como únicamente se pretende estudiar la influencia de dos parámetros sobre el material, no será necesario llevar a cabo simulaciones con las otras dos probetas que se tienen disponibles y que se utilizan más tarde para otro tipo de estudios más definidos sobre los criterios de plastificación del material, séase la influencia de los invariantes  $I_1$  y  $J_3$  en la tensión, que suponen un avance sobre el propio método de Von Mises que aquí se estudia y permite ver las diferencia que se observen entre ambos resultados.

### 9.1.1. Simulaciones cuasi estáticas

Primeramente se han realizado unos ensayos cuasi estáticos con velocidades de deformación comprendidas entre  $10^{-1}$  y  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  para distintas temperaturas de ensayo. Se realizan ensayos a compresión y a tracción, pero en este caso al tratarse de Von Mises, y cómo se ha explicado anteriormente en este texto, por ser el parámetro  $m=1$ , la tensión que se obtiene con el modelo constitutivo es igual tanto a tracción como a compresión, por lo tanto se obtienen los mismos resultados en ambos ensayos.

En estas simulaciones se van a comparar también los resultados que se obtienen con el modelo numérico (elementos finitos) con los que se obtienen del modelo analítico, a fin de observar la aproximación del modelo de elementos finitos.

A continuación se presentan una serie de gráficas con los ensayos cuasi estáticos a una temperatura fija y variando la velocidad de deformación:

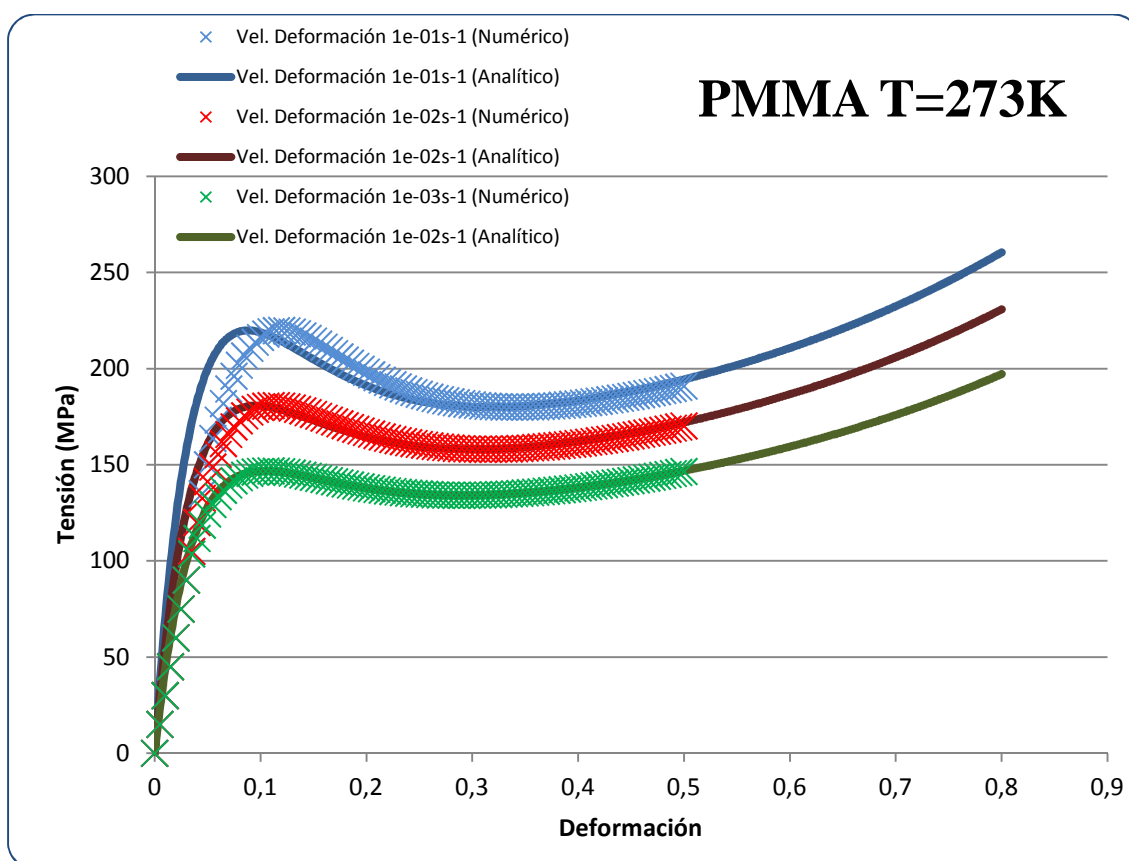


Figura 9.1 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una temperatura de 273K.

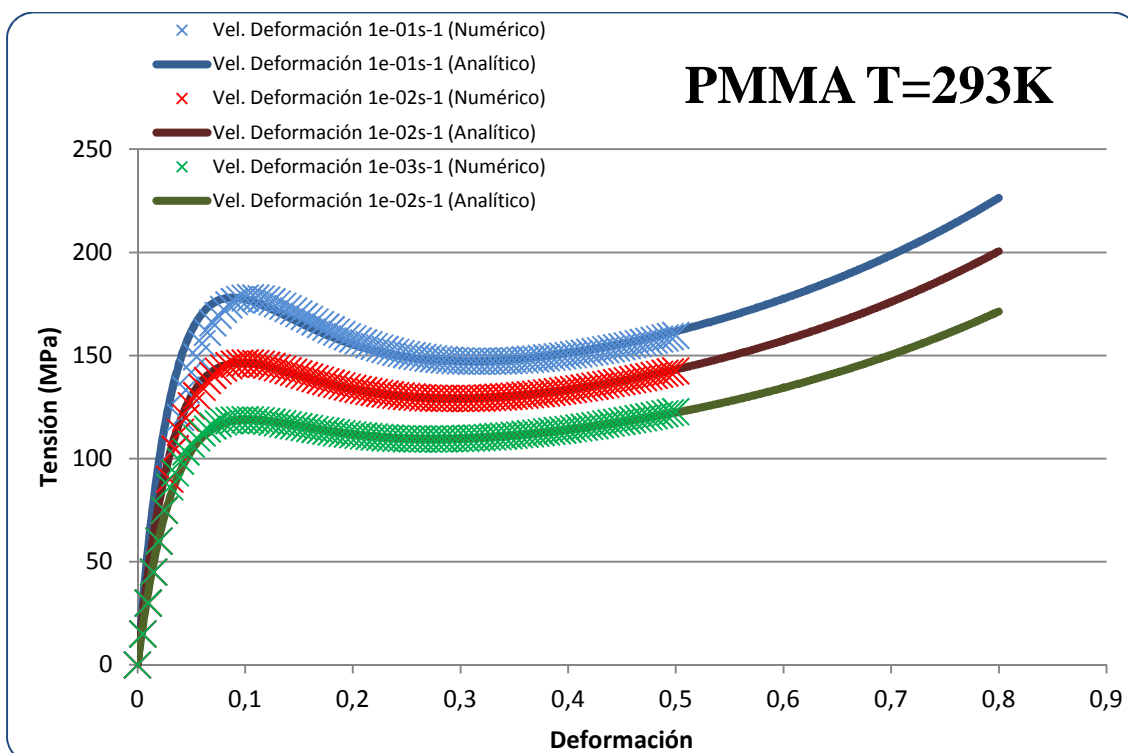


Figura 9.2 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una temperatura de 293K.

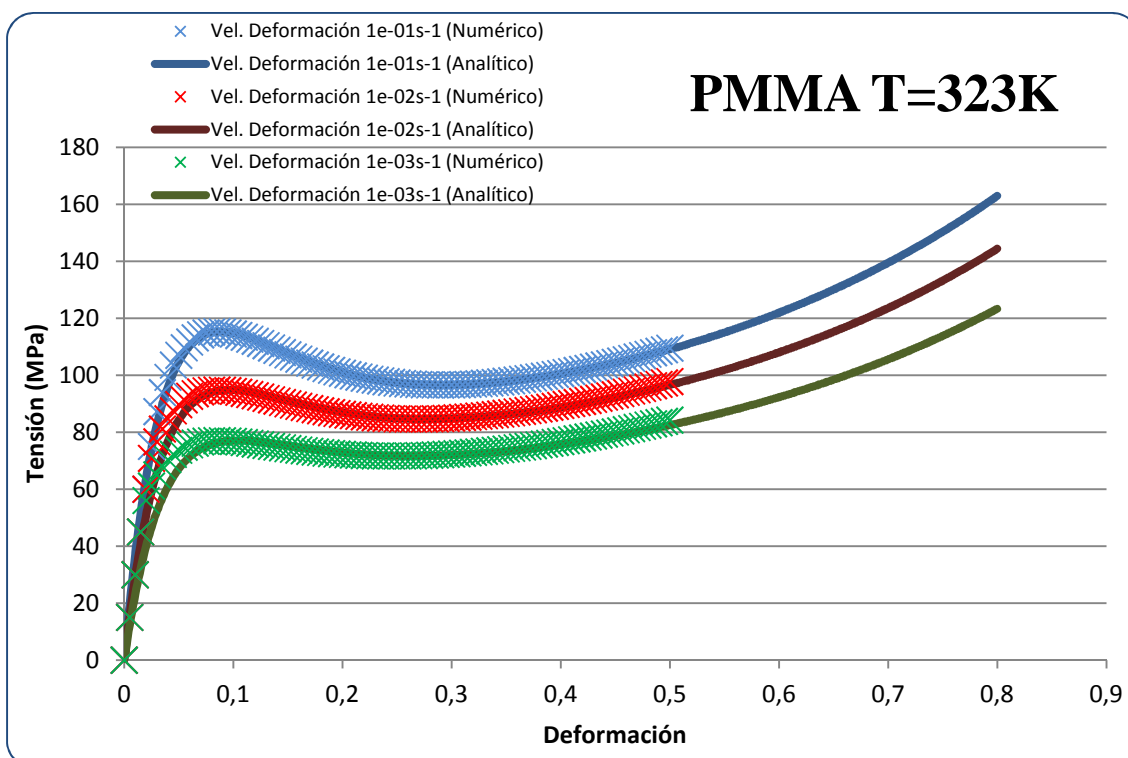


Figura 9.3 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una temperatura de 323K.



Como se puede observar en las gráficas obtenidas aumentan las tensiones obtenidas, así como el límite elástico del material según aumenta la velocidad de deformación, esto concuerda firmemente con la ecuación constitutiva del material utilizado descrita por Forquin, en el que la velocidad de deformación es directamente proporcional a la tensión que se obtiene en las simulaciones.

También se puede ver el detalle de que cuando se aumenta la velocidad de deformación del ensayo, las curvas tensión-deformación obtenidas en el modelo numérico se alejan poco a poco de las obtenidas en el modelo analítico. Esto es debido a que se trabaja en elementos finitos con el módulo de elasticidad fijo de 3GPa del PMMA y como se observa a velocidades de deformación más altas el comportamiento elástico no se ciñe a ese módulo de elasticidad fijado, sino que es más elevado. Si se calcula la pendiente de las gráficas se observa que se tienen módulos de elasticidad diferentes al de 3GPa para algunos casos.

Se calculan las pendientes del primer ejemplo, las curvas analíticas obtenidas para el PMMA a 273K tienen una pendiente en el comportamiento elástico del material de 4.1GPa para el caso de la velocidad de deformación de  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ , de 3.3GPa para el caso de la velocidad de deformación de  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ , y de 2.7GPa para el tercero de  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . Aunque la aproximación es bastante fiable, he aquí la explicación de esas pequeñas desviaciones en las curvas.

A continuación se presentan las gráficas de los ensayos con una velocidad de deformación en la que se van variando la temperatura:

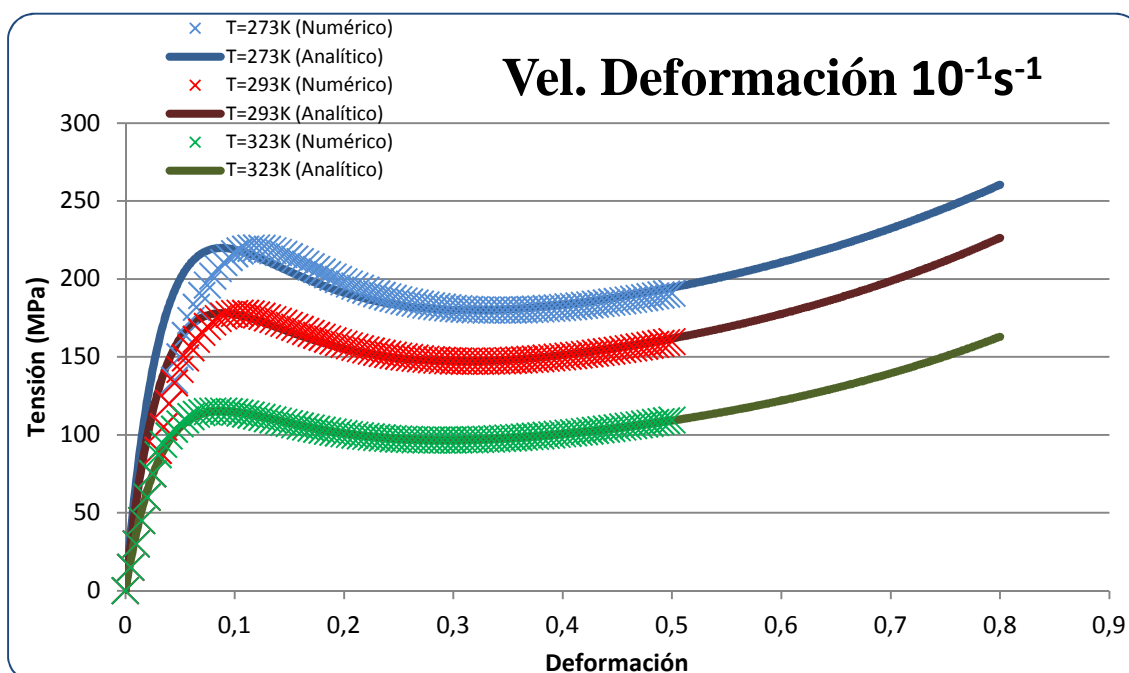


Figura 9.4 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una velocidad de deformación de  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .

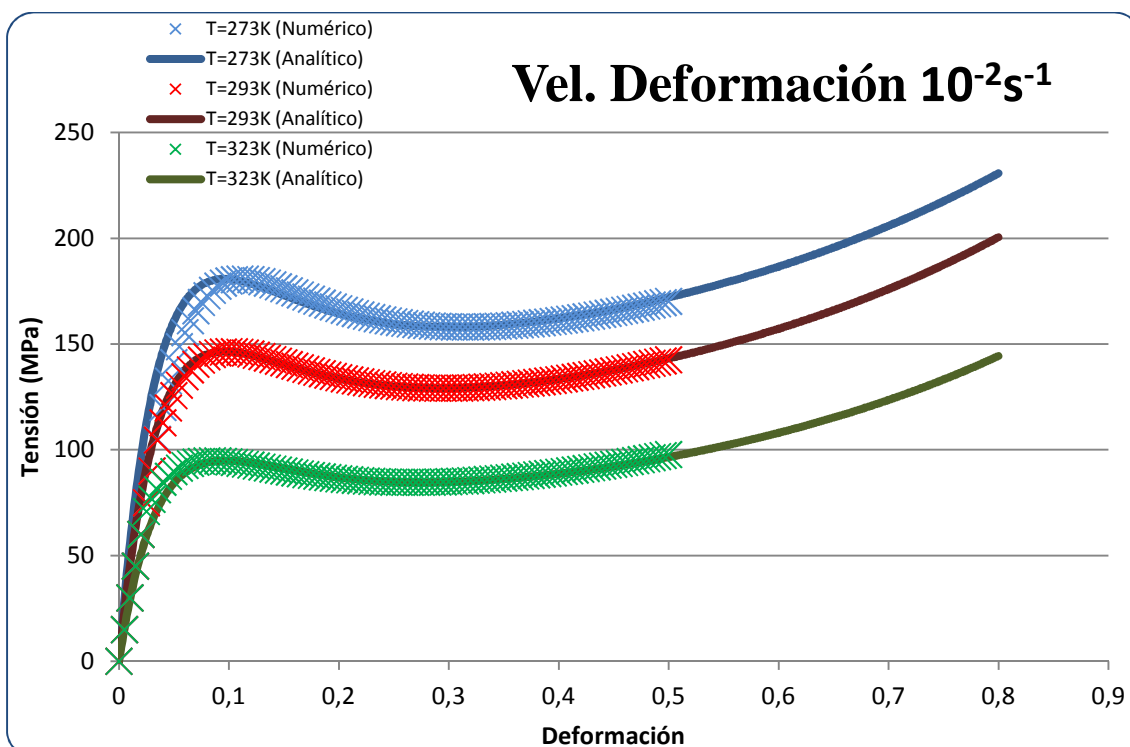


Figura 9.5 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una velocidad de deformación de  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .

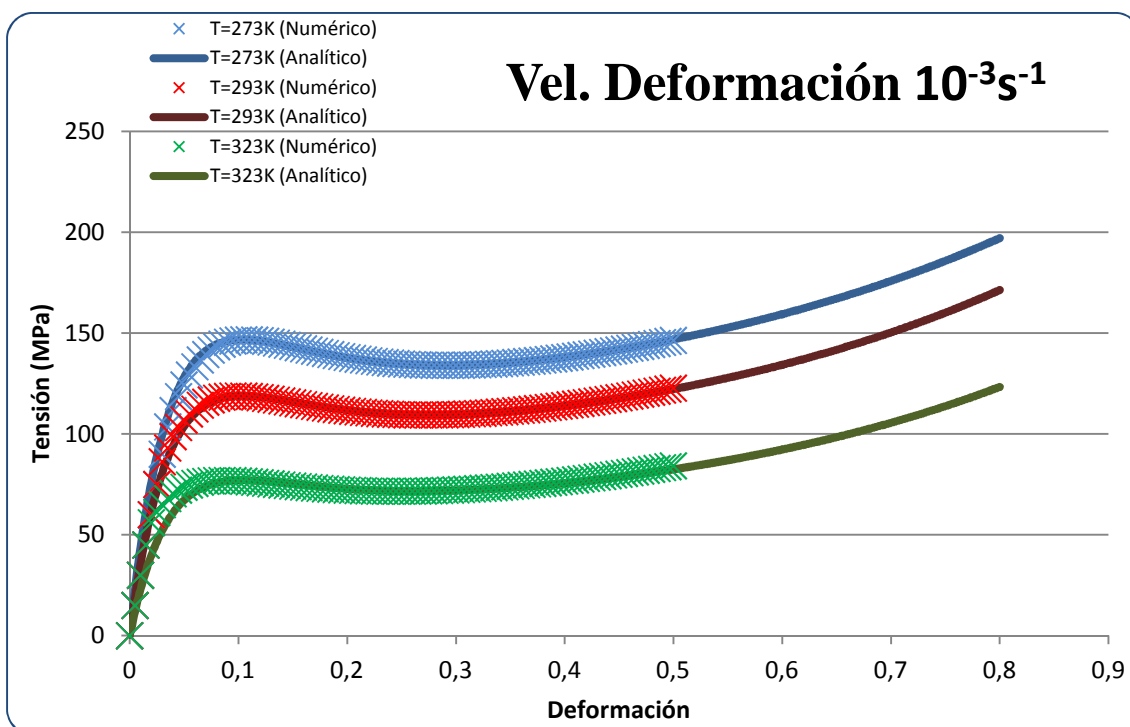


Figura 9.6 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo a compresión para una velocidad de deformación de  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .



Estas curvas han sido obtenidas de manera análoga de los ensayos anteriores, al tratarse de los mismos casos en cuanto a temperatura y velocidad de deformación. Se presentan de esta manera para poder observar el efecto en este caso que sufre en el comportamiento el PMMA en función de la temperatura de ensayo.

Se observa que cuanto menor es la temperatura a la que trabaja el PMMA soporta mayores tensiones antes de plastificar, por lo que tiene un comportamiento más duro a bajas temperaturas y más dúctil a altas temperaturas, esto refleja verazmente lo que se observaba en la ecuación constitutiva del material del que se dispone en el que la temperatura es un parámetro que es inversamente proporcional a la tensión que se obtiene en las simulaciones.

Como en los casos anteriores se observa en este caso que cuanto menor es la temperatura, en este caso, más diferencia se observa entre los resultados analíticos de los numéricos. Esto es debido exactamente a lo mismo que en el caso anterior de trabajar en el modelo numérico con un valor de E constante introducido en la simulación y no variarlo para cada una de las simulaciones. Aún y con eso se puede decir, que la aproximación del modelo numérico al analítico es bastante acertada y predice el comportamiento del material en el mismo grado de exactitud.

### 9.1.2. Simulaciones dinámicas

En este apartado se recogen los resultados sobre las simulaciones que se han realizado con velocidades de deformación comprendidas entre  $10^{-1}$  y  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  para distintas temperaturas de ensayo. Se realizan ensayos a compresión y a tracción, pero como en el caso anterior al tratarse de Von Mises, y cómo se ha explicado anteriormente la tensión que se obtiene con el modelo constitutivo es igual tanto a tracción como a compresión, por lo tanto se obtienen los mismos resultados en ambos ensayos.

Al igual que para los casos cuasi estáticos, se van a comparar los resultados obtenidos de manera numérica con los que se calculan de manera analítica.

A continuación se presentan una serie de gráficas con los ensayos dinámicos a una temperatura fija y variando la velocidad de deformación:

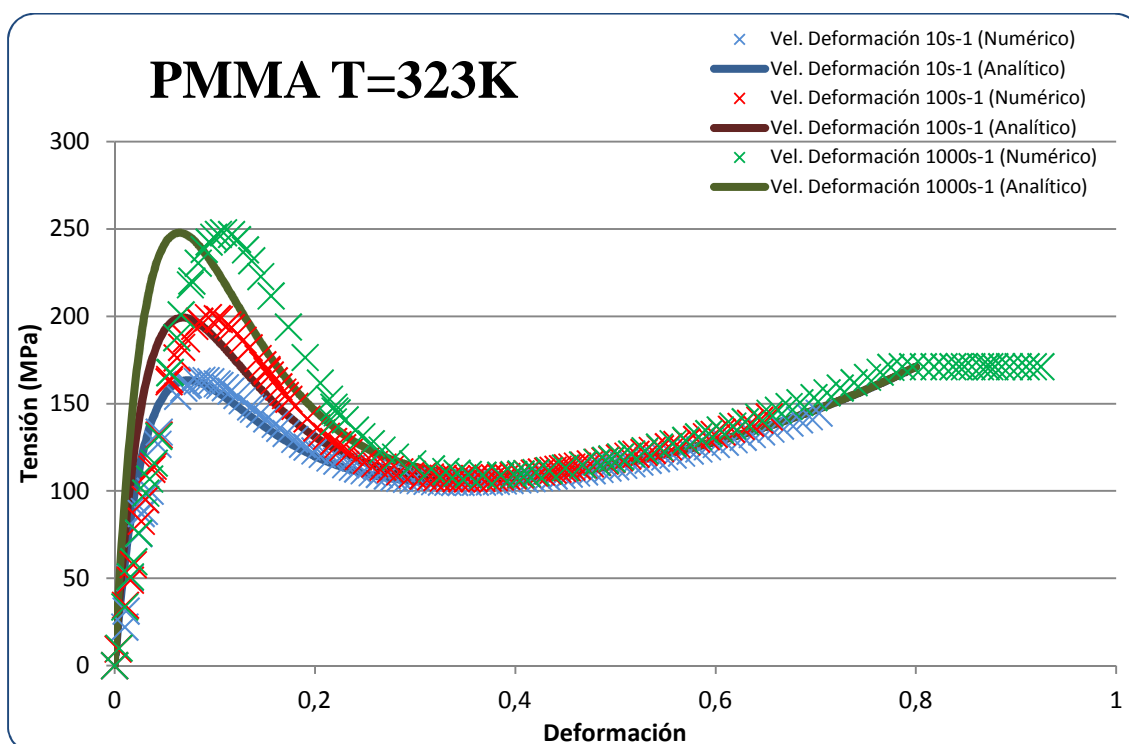


Figura 9.7 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 323K.

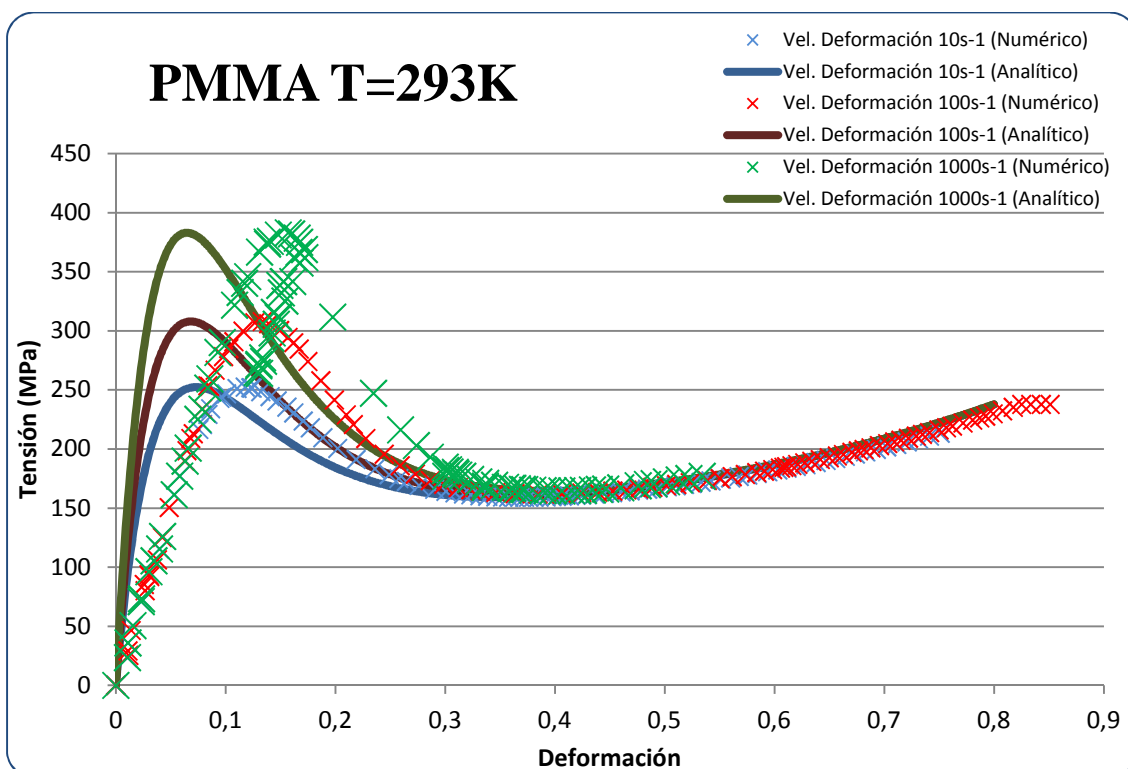


Figura 9.8 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 323K.

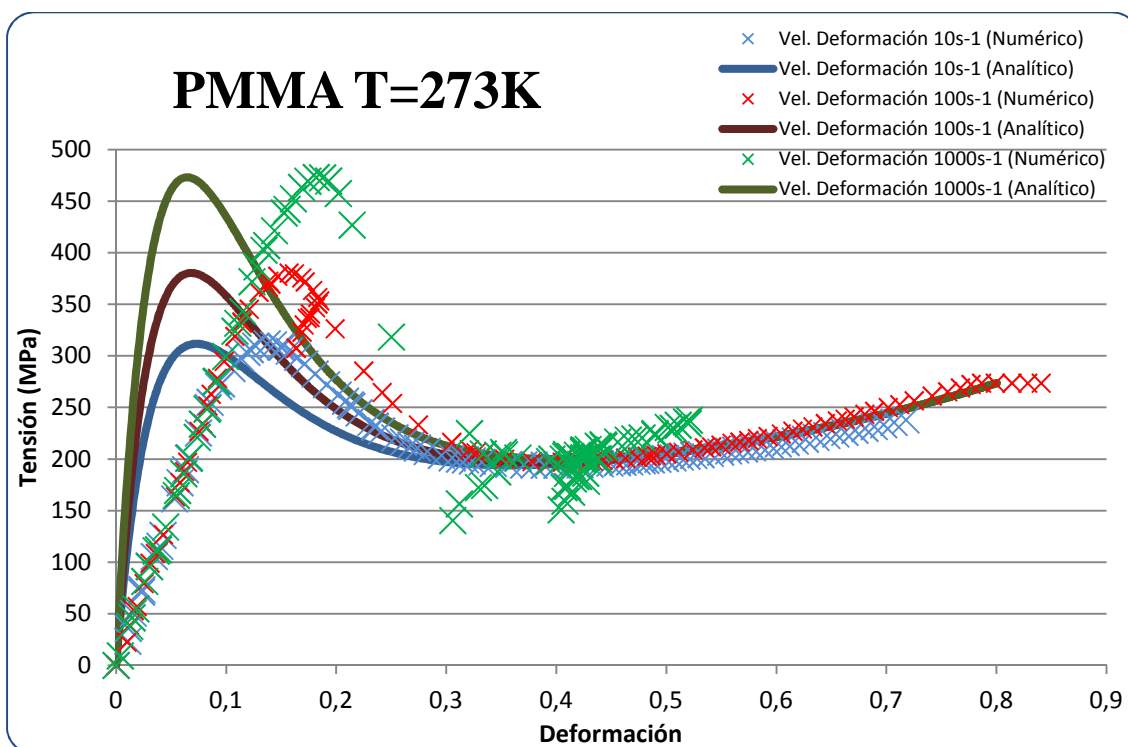


Figura 9.9 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 293K.

Se observa que al igual que en el caso de simulaciones cuasi estáticas cuanto mayor es la velocidad de deformación además de por supuesto aumentar la dureza del material y la parte elástica del mismo ya que plastifica a una tensión mayor, también se tiene una desviación en cuanto a las curvas obtenidas en el modelo numérico con respecto al modelo analítico.

En este caso la desviación es más pronunciada que en los casos cuasi estáticos debido a que al haber aumentado considerablemente la velocidad de los ensayos el módulo de elasticidad del material aumenta en las mismas proporciones. Así si calculamos el módulo de elasticidad del último ejemplo a 273K para cada velocidad de deformación obtenemos unos valores de 12GPa para una velocidad de deformación de  $1000\text{s}^{-1}$ , 10GPa para una velocidad de deformación de  $100\text{s}^{-1}$ , y de 8GPa para una velocidad de deformación de  $10\text{s}^{-1}$ ; muy lejos de los 3GPa que se estableció como módulo de elasticidad del PMMA para la realización de los ensayos.

Por tanto, si se repiten las simulaciones numéricas introduciendo el nuevo módulo de elasticidad que se obtiene en cada curva analítica, se obtienen las siguientes curvas que coinciden casi exactamente con las representaciones analíticas:

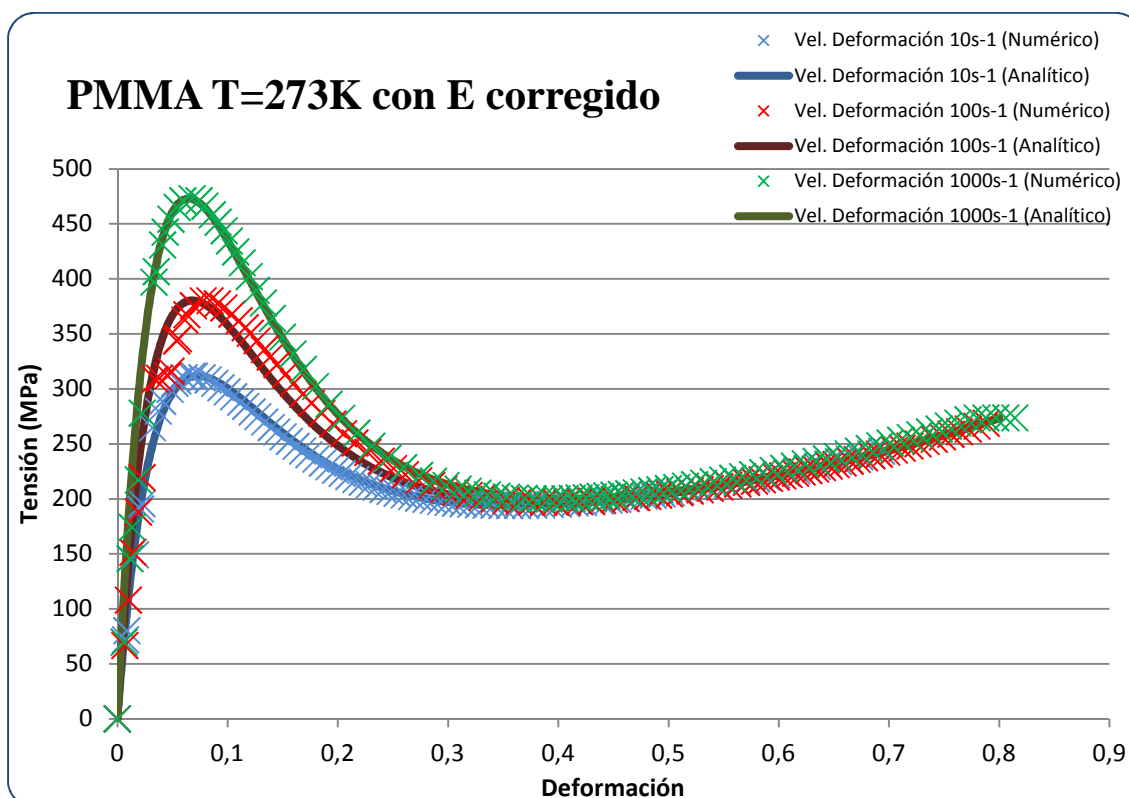


Figura 9.10 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una temperatura de 273K con E corregido.

A continuación se presentan las gráficas que por analogía se obtienen de los ensayos anteriores, en este caso para poder observar cómo influye variar la temperatura inicial en cada uno de los ensayos a altas velocidades de deformación:

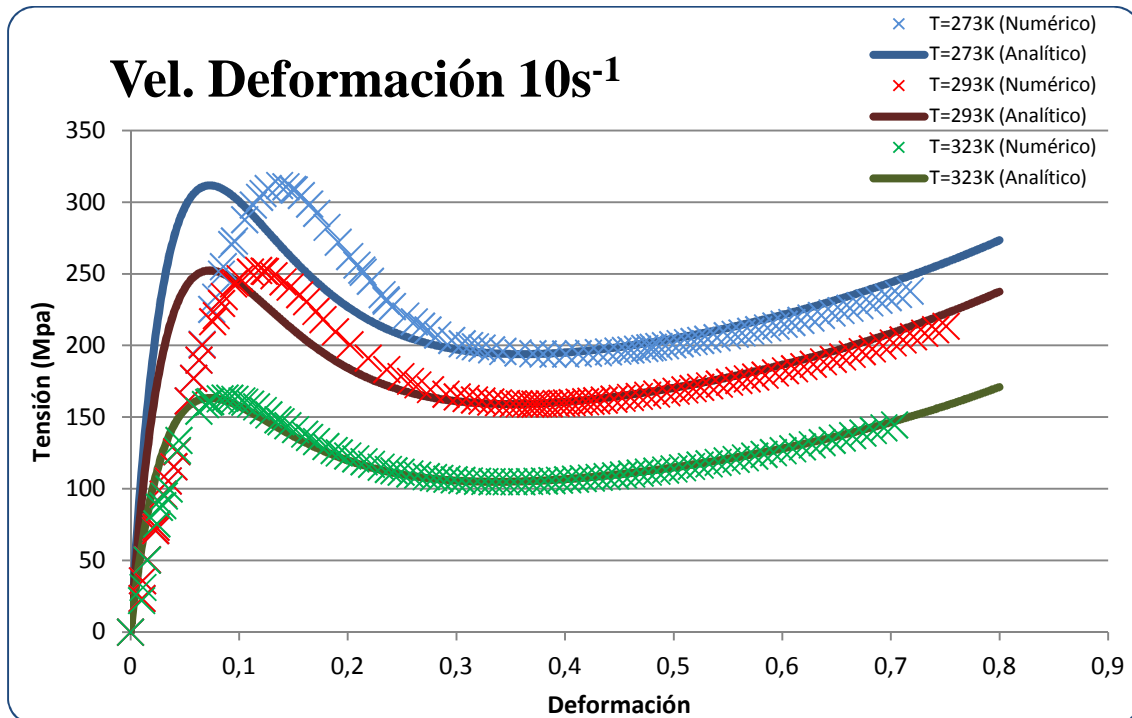


Figura 9.11 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de  $10s^{-1}$ .

Nuevamente y al igual que en los casos cuasi estáticos se observa cómo variando la temperatura inicial de ensayo el PMMA es más duro y llega al punto de plastificación a una tensión superior cuanto menor es dicha temperatura.



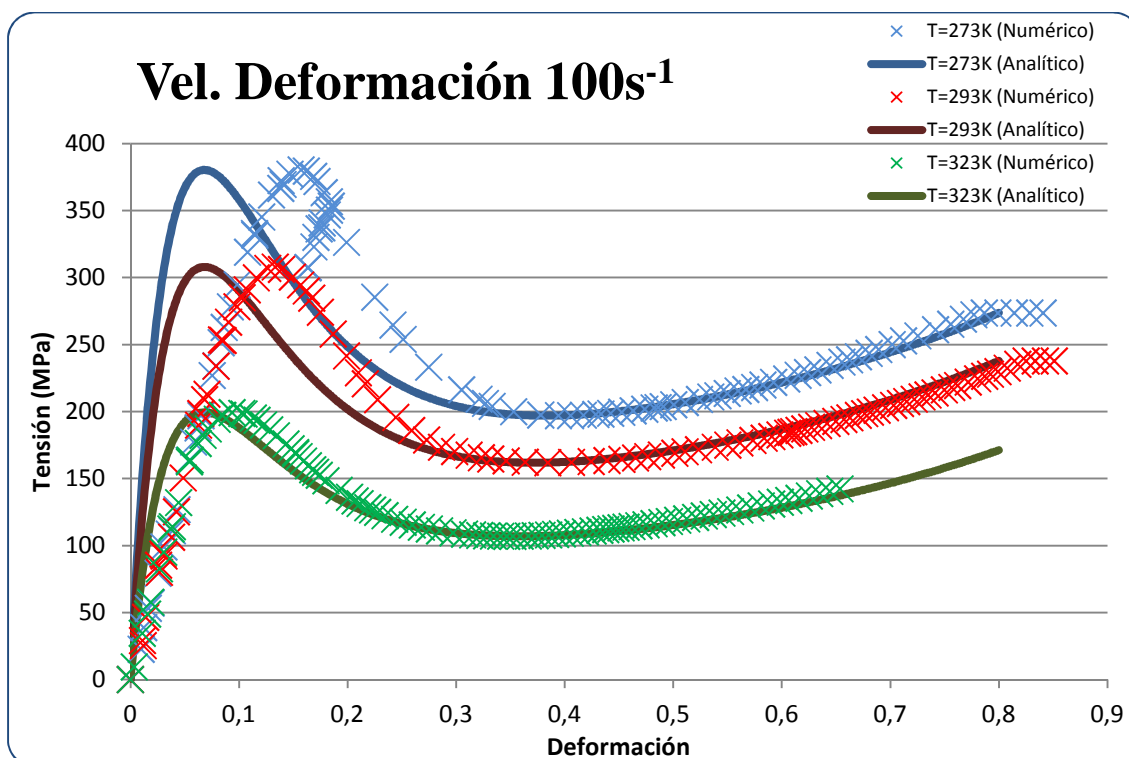


Figura 9.12 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de  $100\text{s}^{-1}$ .

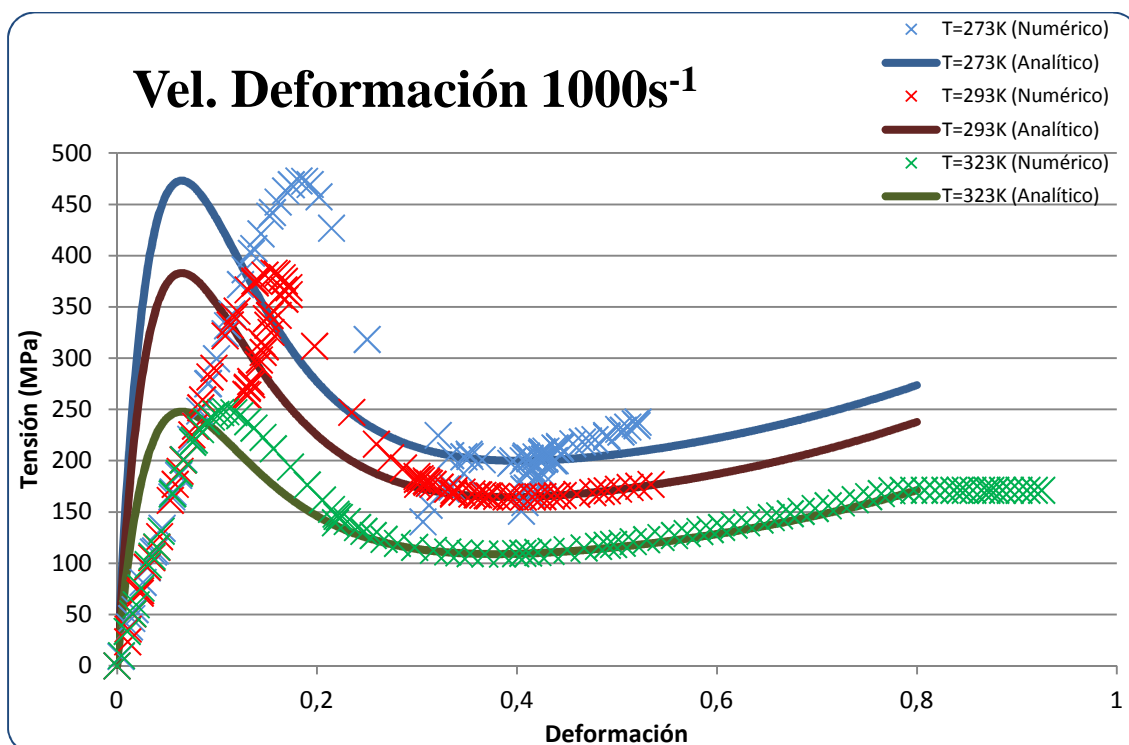


Figura 9. 13 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de  $1000\text{s}^{-1}$ .



Al igual que ocurría al aumentar la velocidad de deformación, también cuanto menor es la temperatura más desviación se observa entre las gráficas obtenidas por elementos finitos y las gráficas obtenidas analíticamente.

En este caso la pendiente de cada curva a  $1000\text{s}^{-1}$ , calculadas analíticamente, será de 12GPa para 273K, 10GPa para 293K y 6.6GPa para 323K. Introduciendo nuevamente estos módulos de elasticidad en el programa de elementos finitos se obtienen unas curvas de tensión-deformación prácticamente idénticas a las que se obtienen de manera analítica.

En definitiva si se quiere aproximar el resultado mediante un modelo de elementos finitos, no se puede simplificar a un módulo de elasticidad conocido del material y lanzar los casos, sino que se debe calcular el módulo de elasticidad correspondiente al caso a lanzar e incluirlo en el programa. Esto es especialmente necesario para los casos dinámicos con altas velocidades de deformación, pues se observa que son los casos que mayores desviaciones presentan.

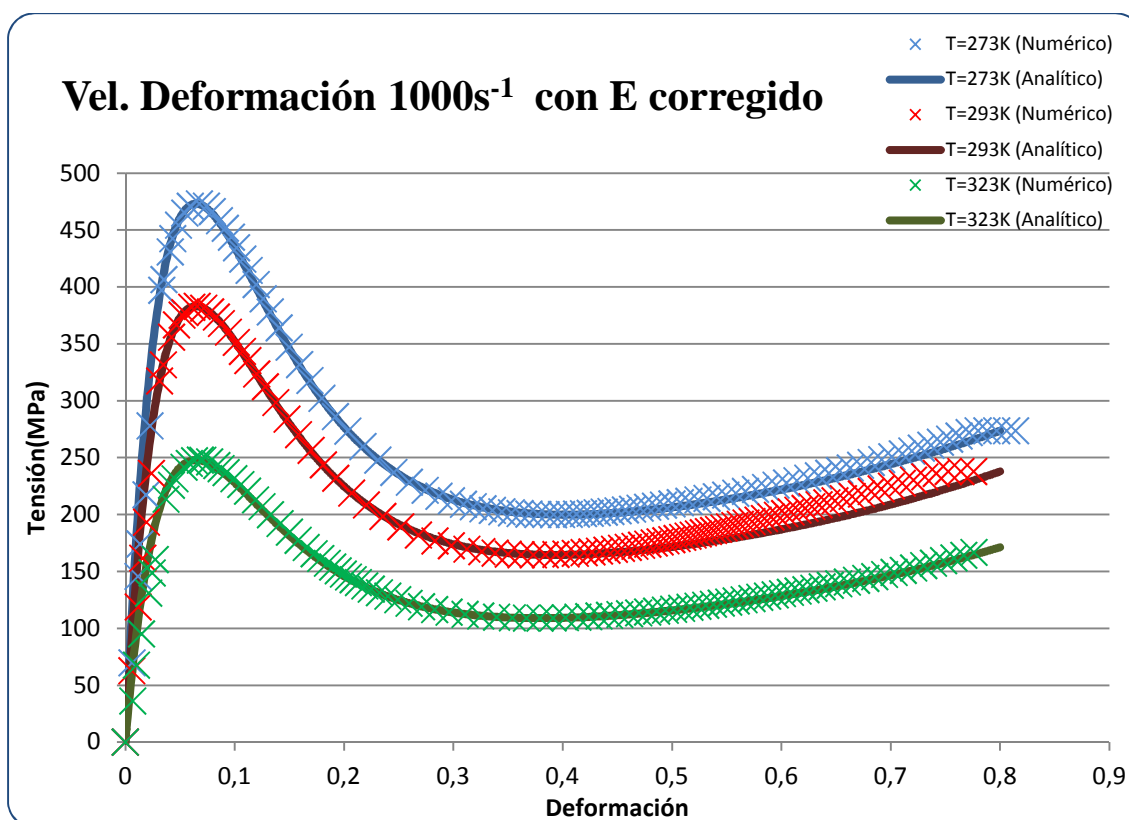


Figura 9.14 Comparación de los resultados numéricos y analíticos en un ensayo dinámico a compresión uniaxial para una velocidad de deformación de  $1000\text{s}^{-1}$  con E corregido.

## 9.2. SIMULACIONES NUEVO CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN

En este apartado se realizan las simulaciones correspondientes a ensayos a bajas velocidades de deformación para los tres estudios que se definen en el capítulo 8, paramétrico, estudio de influencia de  $I_1$  y de  $J_3$ .

Estas simulaciones se llevarán a cabo mediante la inclusión en el modelo de elementos finitos de una subrutina para el módulo “*property*”, en la que se desarrolla el comportamiento constitutivo del material y el criterio de plastificación desarrollado en el capítulo 6.

En la literatura se comentó brevemente que el modelo constitutivo del material se había demostrado experimentalmente para ensayos cuasi estáticos a compresión, pero aquí se va a extrapolar a unas simulaciones tanto de tracción como de compresión a fin de estudiar el comportamiento del material en estas condiciones y la influencia que tienen los distintos parámetros a estudiar y los criterios de plastificación estudiados en la literatura sobre las tensiones sufridas en el material.

Los valores típicos de estudio y que irán modificándose en cada apartado se recogen en la siguiente tabla. Se pueden considerar como los valores de un ensayo estándar para el PMMA:

$\dot{\epsilon}$ ( $s^{-1}$ )	T (K)	m	n	$\alpha$ (1/K)	$\chi$
0.01	300	1.2	2	$7 \cdot 10^{-5}$	0.8

Para el ensayo de influencia del  $J_3$  se variará entre la existencia o no del término  $\Psi$ , explicado en el apartado 6.2.2, y cuyo valor variará entre 1 y 1.14.

### 9.2.1. Estudio Paramétrico

En este apartado se presenta la influencia que tienen sobre el comportamiento del material los distintos parámetros de ensayo y que tienen que ver con el modelo constitutivo del PMMA establecido, como se comenta en el apartado 8.1 se procede a realizar distintos ensayos cuasi estáticos de compresión y tracción variando parámetros como la velocidad de deformación del ensayo, la temperatura inicial del ensayo, y diferentes coeficientes que aparecen en las ecuaciones de la literatura.

### 9.2.1.1 Estudio de influencia de la temperatura inicial y la velocidad de deformación

En primer lugar, se muestran los resultados obtenidos con el comportamiento del material en función de la velocidad de deformación o la temperatura.

A continuación se presentan las curvas de tensión-deformación correspondientes a ensayos con una temperatura inicial de simulación definida y en la que se varía la velocidad de deformación del ensayo:

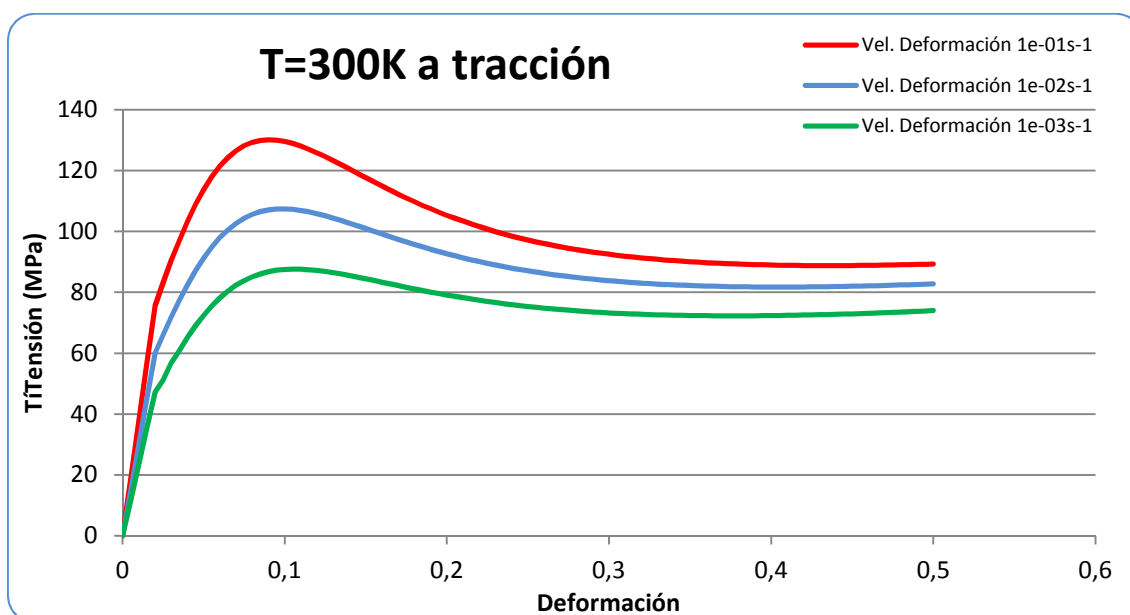


Figura 9.15 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una T=300K.

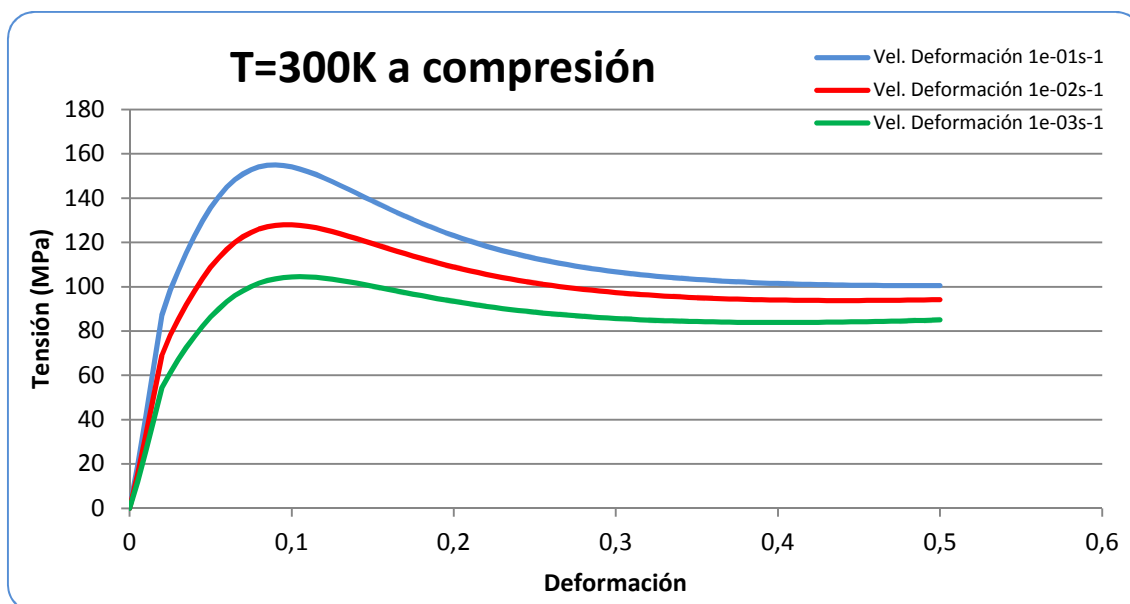


Figura 9.16 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una T=300K.

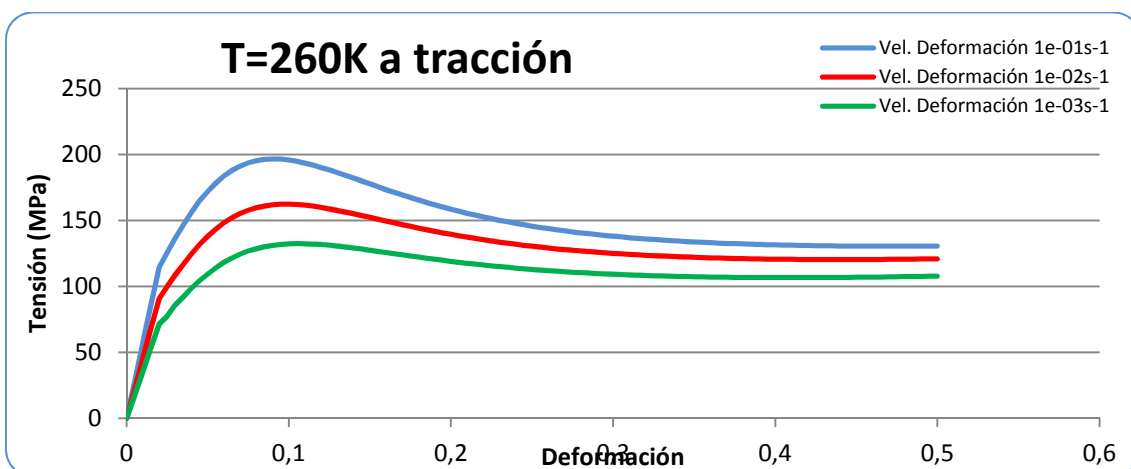


Figura 9.17 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una T=260K.

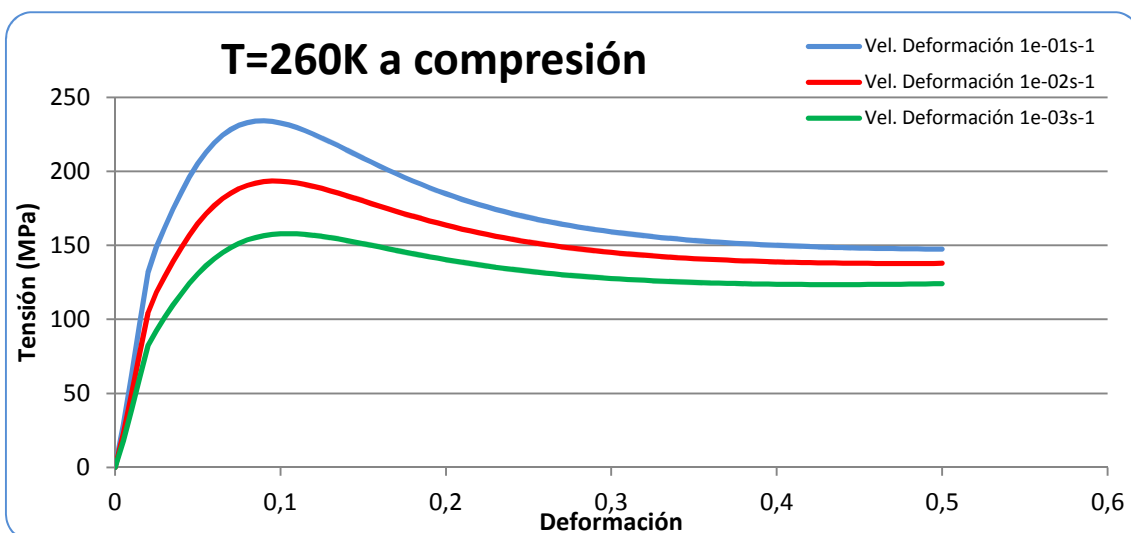


Figura 9.18 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una T=260K.

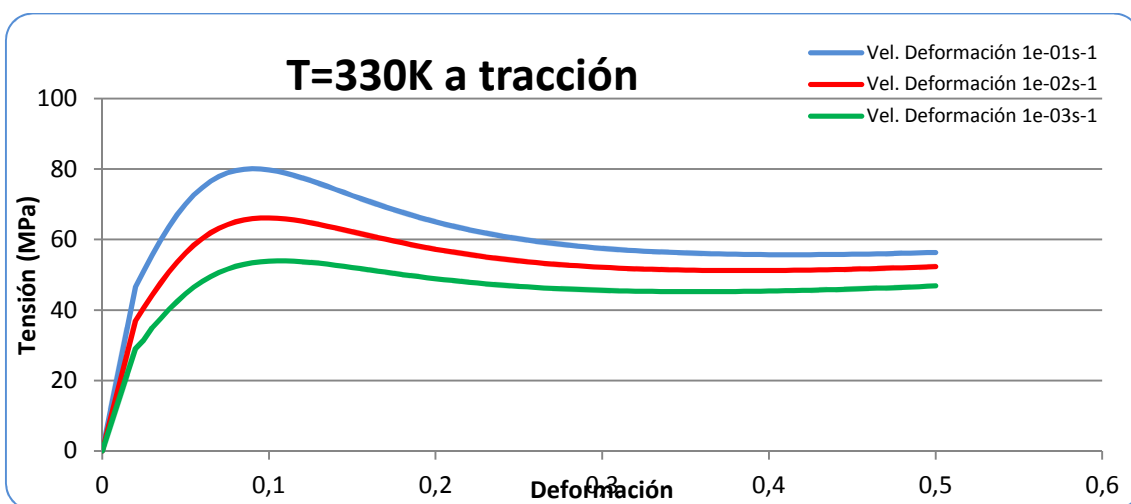


Figura 9.19 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una T=330K.

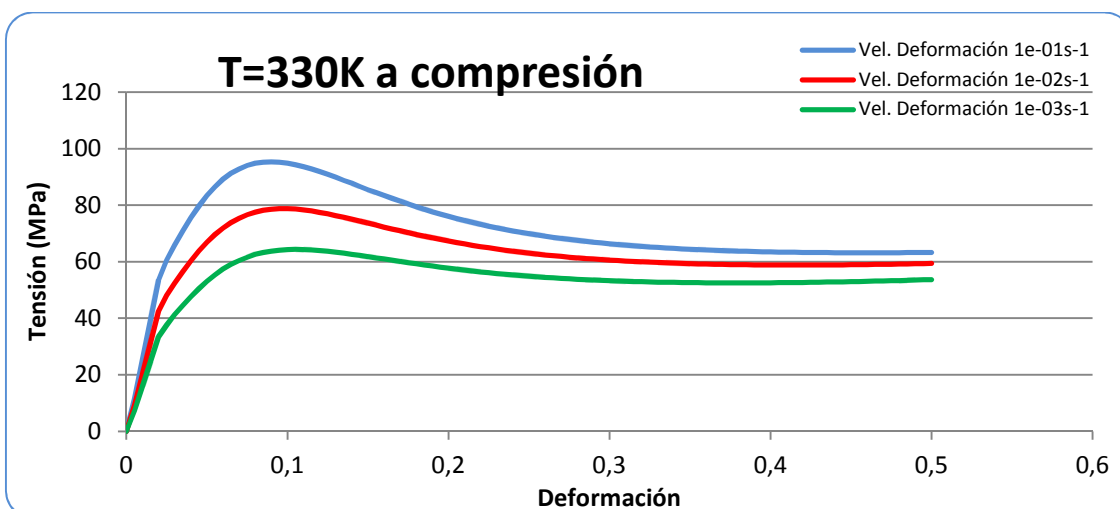


Figura 9.20 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una T=330K.

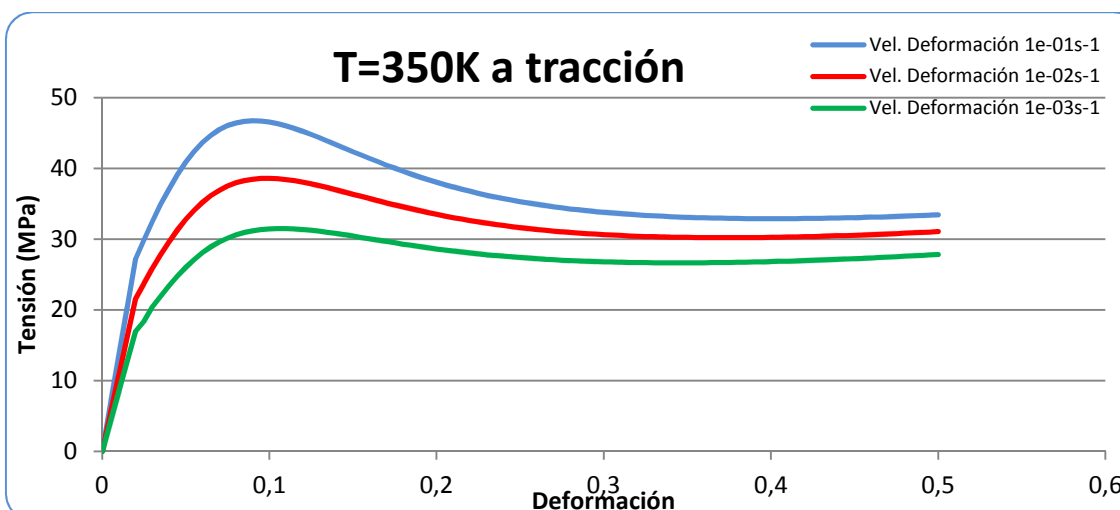


Figura 9.21 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una T=350K.

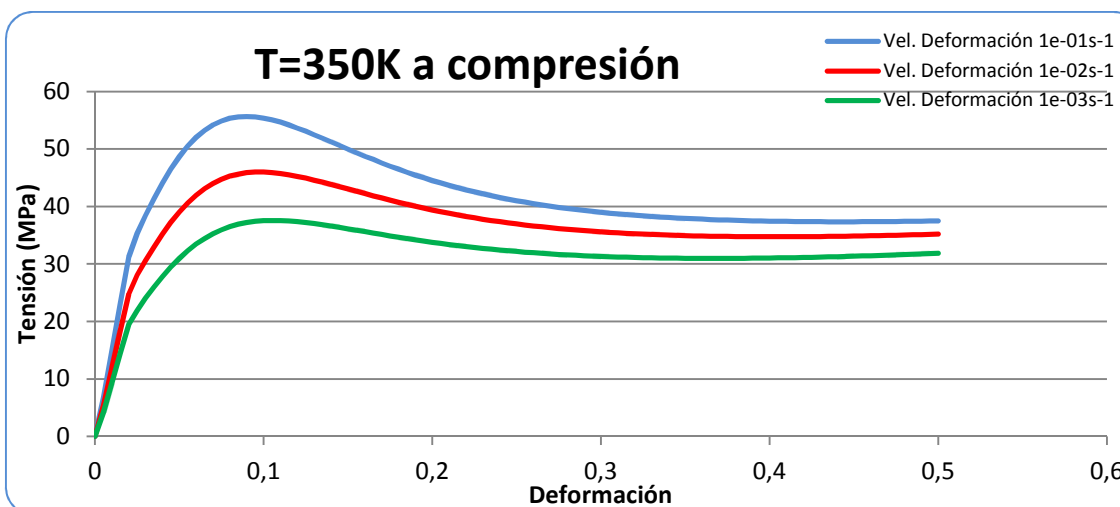


Figura 9.22 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una T=350K.

En todas las gráficas anteriores se puede observar la influencia de la velocidad de deformación en el valor de la tensión en la probeta, como ya se reflejó en el modelo constitutivo elegido, desarrollado por Forquin, en él la velocidad de deformación es directamente proporcional al valor de la tensión que se produce en cada momento de la probeta deformada, y tal y como se aprecia en las gráficas, independientemente de la temperatura elegida, se cumple esa influencia de la velocidad de deformación en la curva de plastificación del material.

A continuación se presentan las curvas tensión-deformación obtenidas con una velocidad de deformación en la simulación definida y variando la temperatura inicial del mismo:

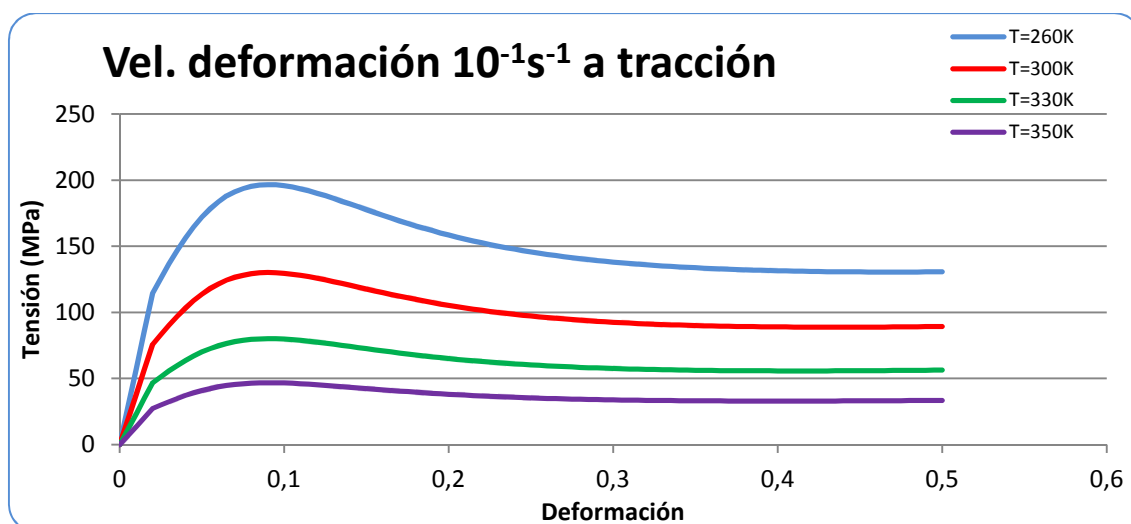


Figura 9.23 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .

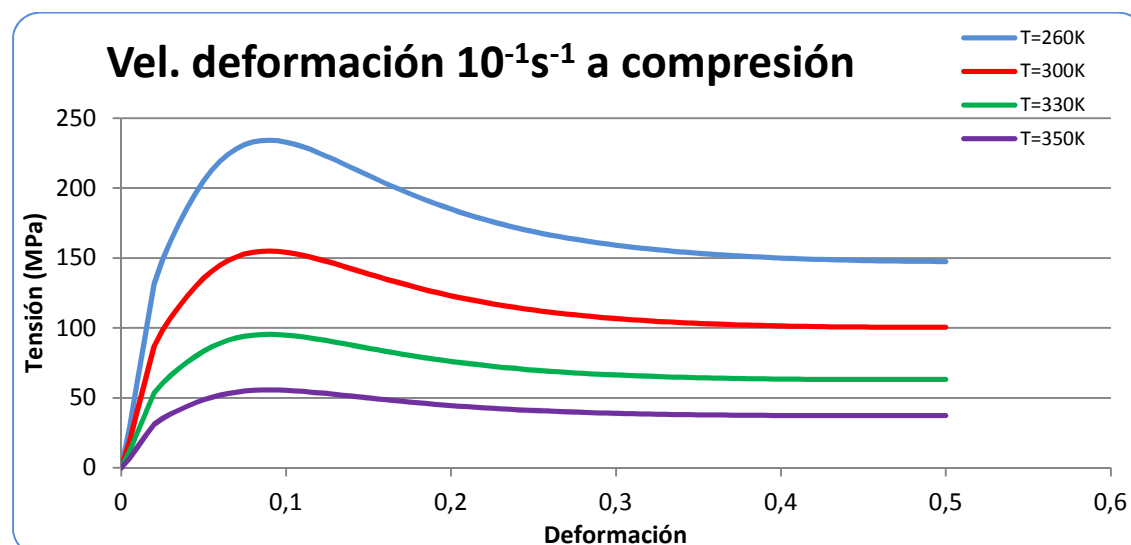


Figura 9.24 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ .

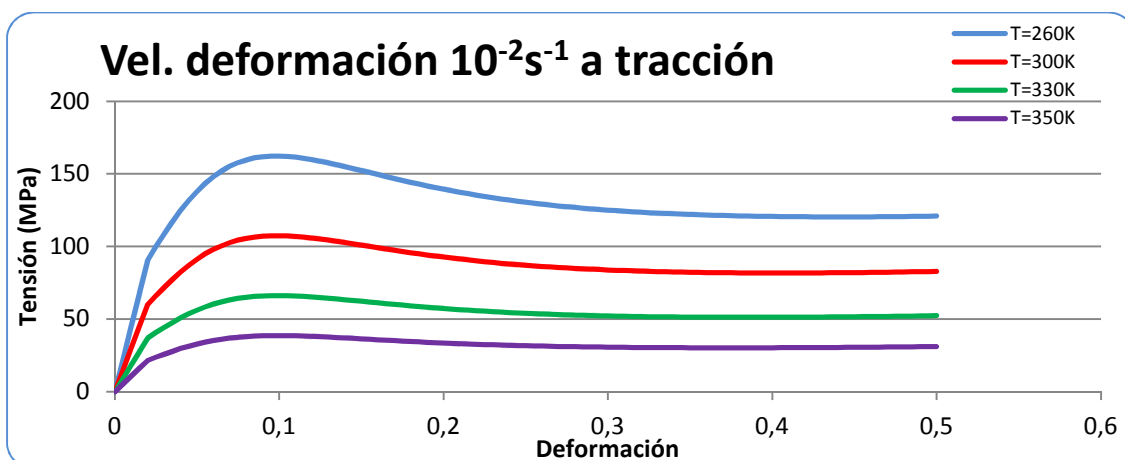


Figura 9.25 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .

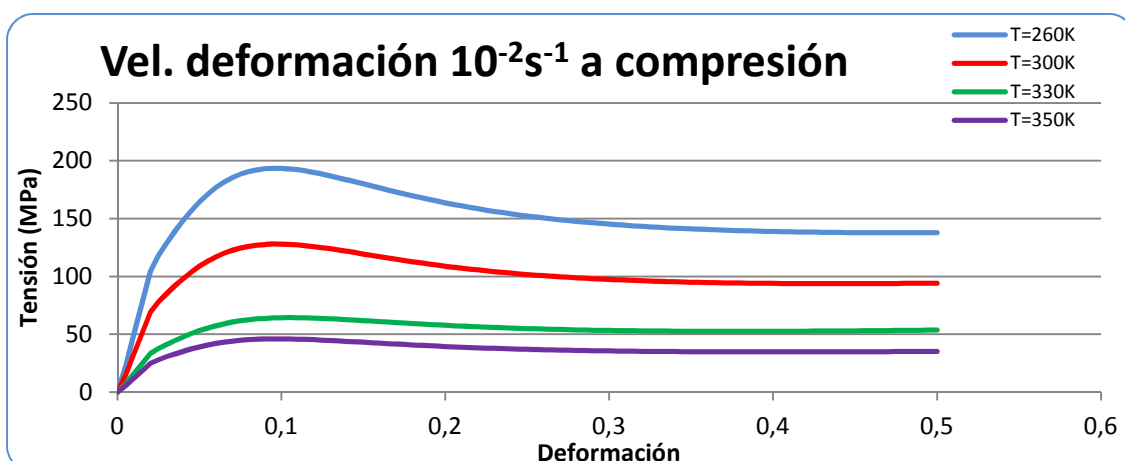


Figura 9.26 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ .

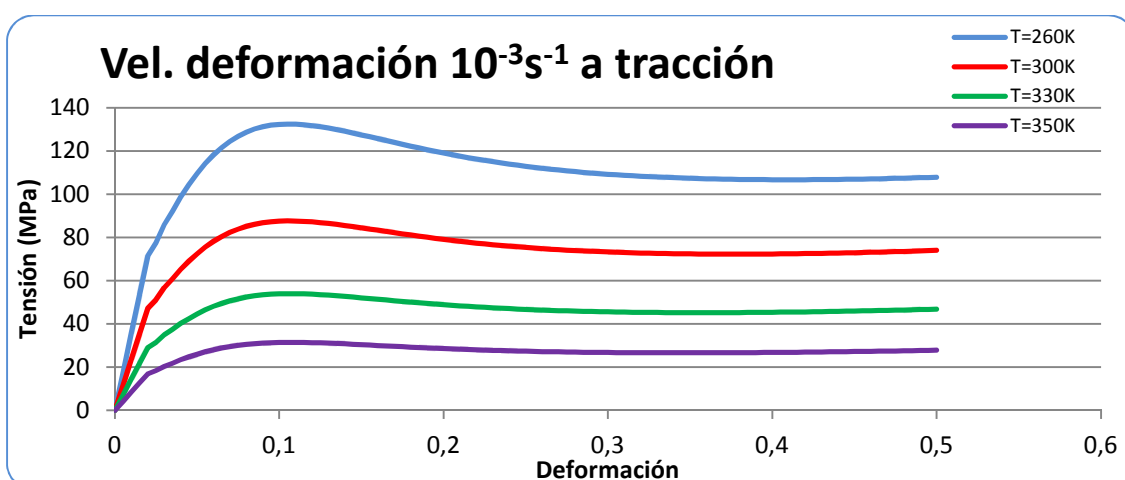


Figura 9.27 Resultados obtenidos por simulación a tracción con una velocidad de deformación de  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .

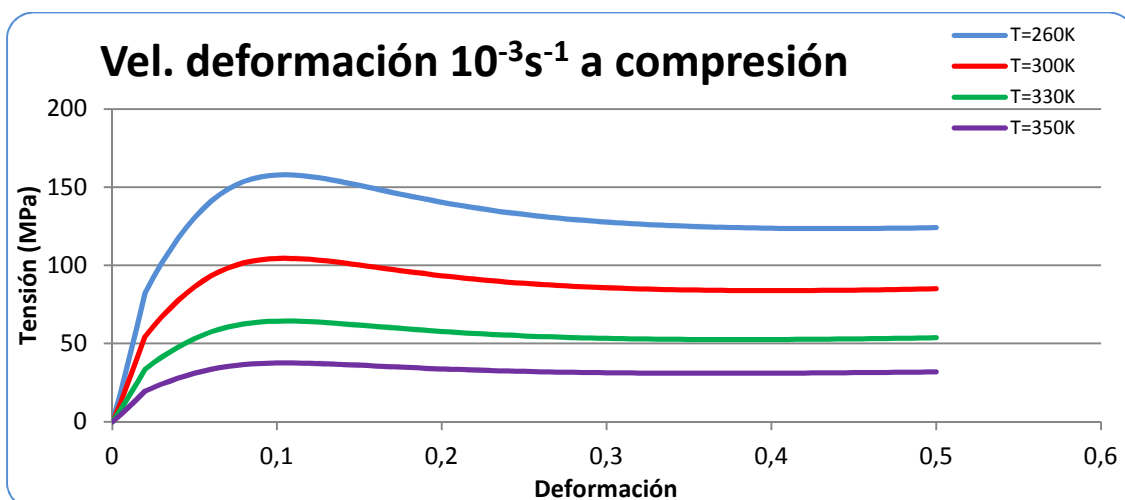


Figura 9.28 Resultados obtenidos por simulación a compresión con una velocidad de deformación de  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ .

En relación con lo estudiado en el modelo constitutivo del PMMA en el capítulo 7 mediante la fórmula de la tensión desarrollada por Forquin, se observa que cumple el hecho de que a mayor temperatura de ensayo la tensión desarrollada y por tanto la curva de plastificación del material es menor, ya que la temperatura inicial del ensayo está inversamente relacionada con la tensión en dicha fórmula. Se observa que independientemente de la velocidad de deformación elegida para el desarrollo de la simulación esa relación temperatura-tensión es invariante y se cumple para todos los casos.



### 9.2.1.2 Sensibilidad frente al coeficiente de dilatación y el coeficiente de Taylor-Quinney

En este apartado se presentan los resultados obtenidos con objeto de estudiar la influencia que tiene el coeficiente de dilatación del material o el coeficiente de Taylor-Quinney, que se estudia en el capítulo 7, sobre el comportamiento termoelastoplástico del material.

A continuación se pueden observar las curvas tensión-deformación para dos simulaciones de tracción y compresión, que han sido obtenidas variando los dos parámetros mencionados:

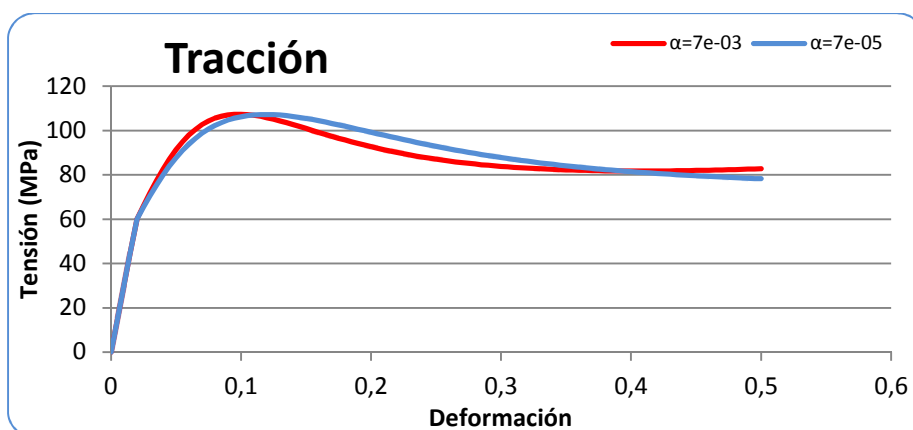


Figura 9.29 Resultados obtenidos en ambas simulaciones de tracción variando el coeficiente de dilatación.

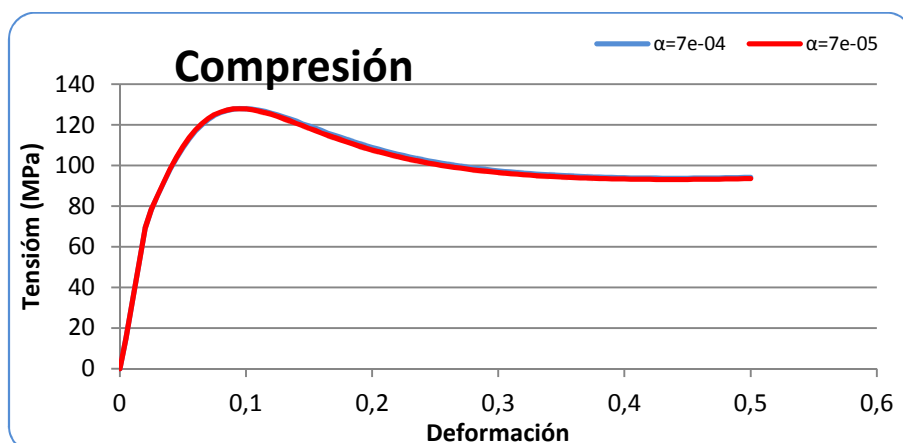


Figura 9.30 Resultados obtenidos en ambas simulaciones de compresión variando el coeficiente de dilatación.

Se observa que el coeficiente de dilatación del material no tiene una relación muy estrecha en la obtención de las curvas de plasticidad y los resultados obtenidos son muy similares independientemente de que el coeficiente del PMMA cambiara. Esto es así porque el coeficiente de dilatación es muy pequeño y la probeta se calienta muy poco, por lo que tiene poca incidencia en el comportamiento del material.

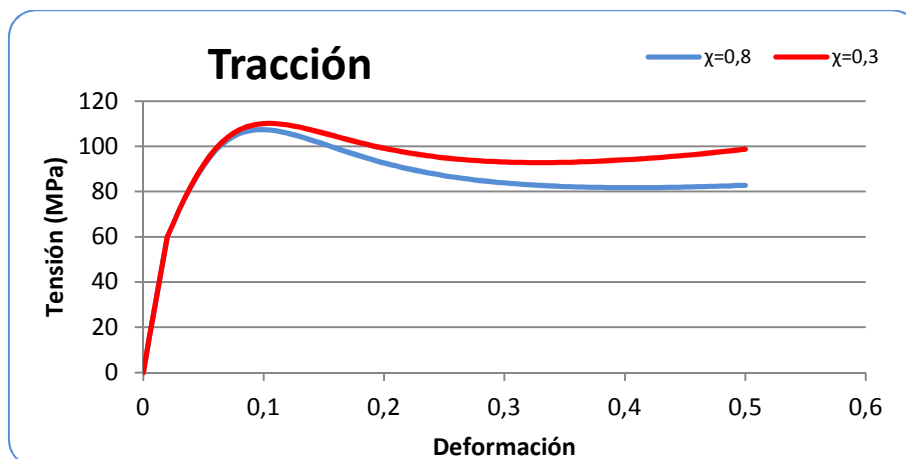


Figura 9.31 Resultados obtenidos en ambas simulaciones de tracción variando el coeficiente de Taylor-Quinney.

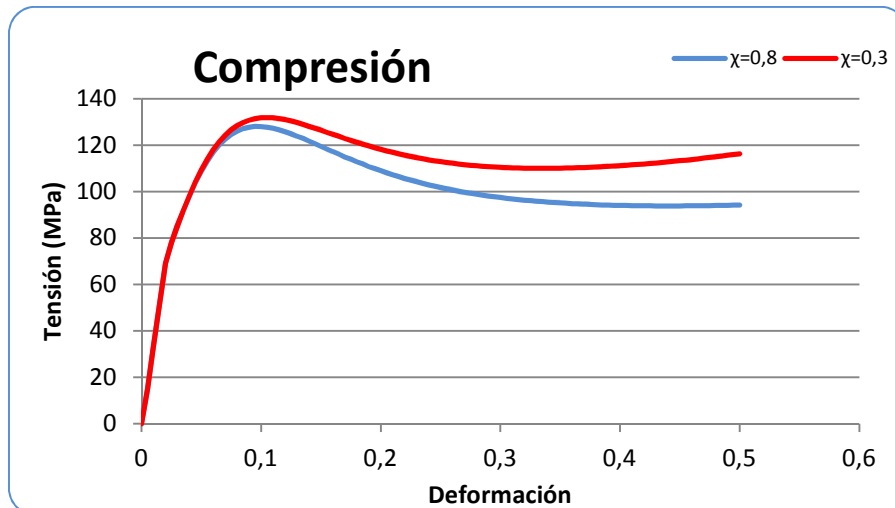


Figura 9.32 Resultados obtenidos en ambas simulaciones de compresión variando el coeficiente de Taylor-Quinney.

Por otro lado, y como se explica en el capítulo 7, mediante la ecuación del balance de energía, el coeficiente de Taylor-Quinney tiene una estrecha relación sobre la cantidad de deformación plástica que se utiliza para calentar la probeta, cuando este coeficiente es más pequeño, como es el caso del 0.3 se observa que la tensión que se obtiene es mayor ya que no se está deformando la probeta plásticamente tanto como en el otro caso. Esto se traduce en que el PMMA con un coeficiente de Taylor-Quinney más elevado (0.8) tiene una facilidad intrínseca para calentarse y favorecer la plastificación con tensiones de trabajo menores que en otros casos.

### 9.2.1.3 Influencia del calentamiento de la probeta

En este apartado se presenta cómo sería el comportamiento del material si no hubiera gradiente de temperaturas, es decir, la probeta no se calentara con el tiempo al aplicarle la una carga o un desplazamiento a la probeta.

Anular ese gradiente de temperaturas se obtiene haciendo cero tanto el coeficiente de dilatación del PMMA, como el coeficiente de Taylor-Quinney. El primero parece bastante lógico porque si el coeficiente de dilatación del material es cero, no se producirá calentamiento en la probeta, es decir, no variara la temperatura a lo largo del ensayo. Por otro lado, cómo se estudia en el apartado 7.3.3 la porción de trabajo plástico que aparece en la probeta que se transforma en calor viene dado por el coeficiente de Taylor-Quinney, si éste es nulo, no se producirá transferencia de energía en forma de calor a la probeta.

Al estar estos dos parámetros introducidos dentro de las ecuaciones de las que se compone la subrutina utilizada y para evitar singularidades no se pueden hacer exactamente cero estos dos parámetros sino que se introducen unos valores que se consideran lo suficientemente pequeños. Los valores que se introducirán para la realización de esta simulación son una centésima parte de los valores reales del PMMA:

$$\alpha = 7 \cdot 10^{-7} \ll 7 \cdot 10^{-5} \quad (\alpha \sim 0)$$
$$\chi = 0.008 \ll 0.8 \quad (\chi \sim 0)$$

A continuación se presentan las curvas tensión-deformación que se obtienen en ambos casos:

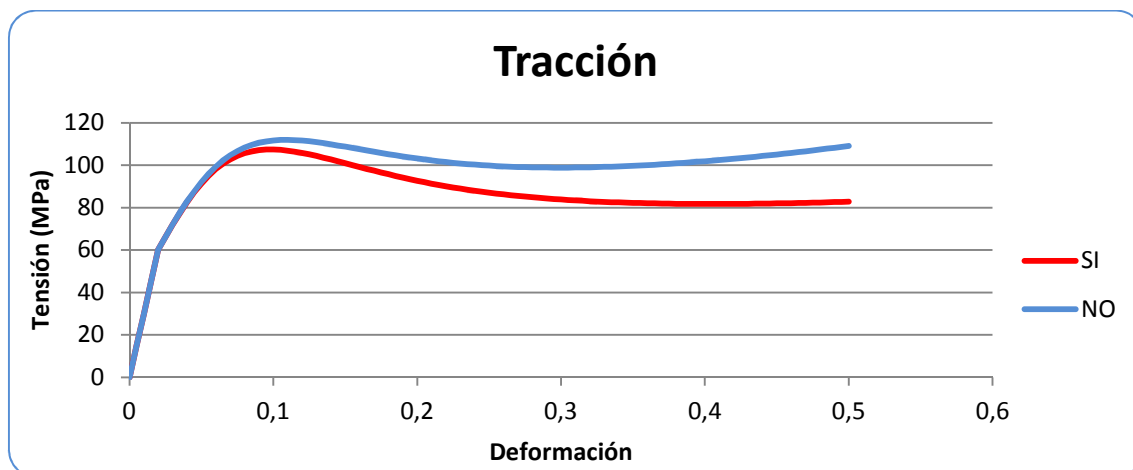


Figura 9.33 Resultados obtenidos en simulaciones de tracción con o sin influencia de la temperatura.

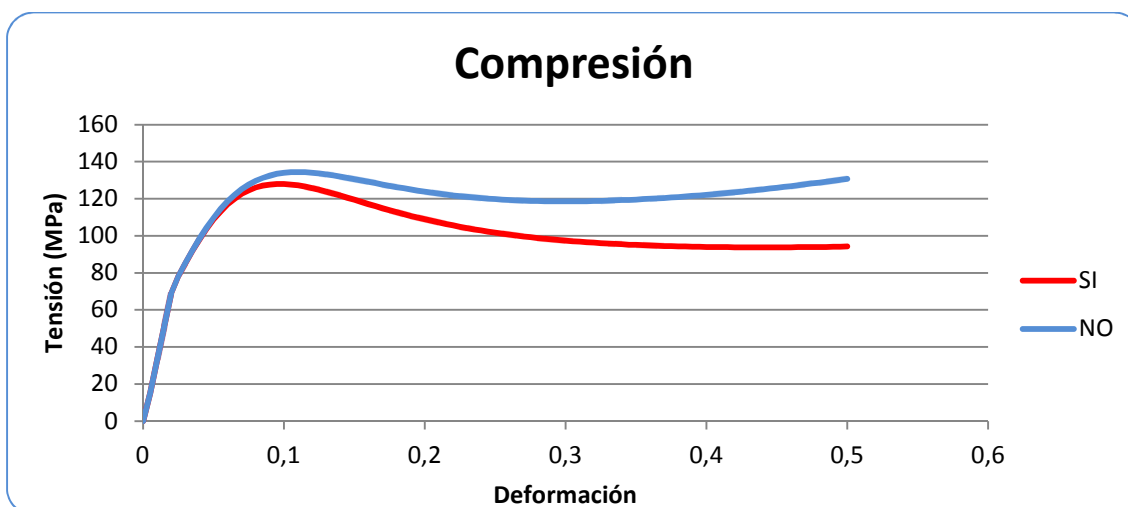


Figura 9.34 Resultados obtenidos en simulaciones de tracción con o sin influencia de la temperatura.

En ambas simulaciones, tanto a tracción como a compresión, se observa que la variación de temperatura en la probeta; es decir, que se caliente; tiene una gran repercusión en el comportamiento plástico del mismo. Como se ha visto en el caso anterior; al reducir el coeficiente de Taylor-Quinney principalmente, la probeta se calienta menos, es por tanto, menos dúctil y se obtienen tensiones mayores en la curva de plastificación del material.

#### 9.2.1.4 Deformación plástica equivalente frente a deformación por incremento de $T$

En este apartado se observa a modo de curiosidad cuánta de la deformación que se obtiene en la probeta proviene de la deformación plástica equivalente y cuanta por el calentamiento de la probeta, es decir, por dilatación del material.

A continuación se presentan unas curvas en las que se puede observar este fenómeno:

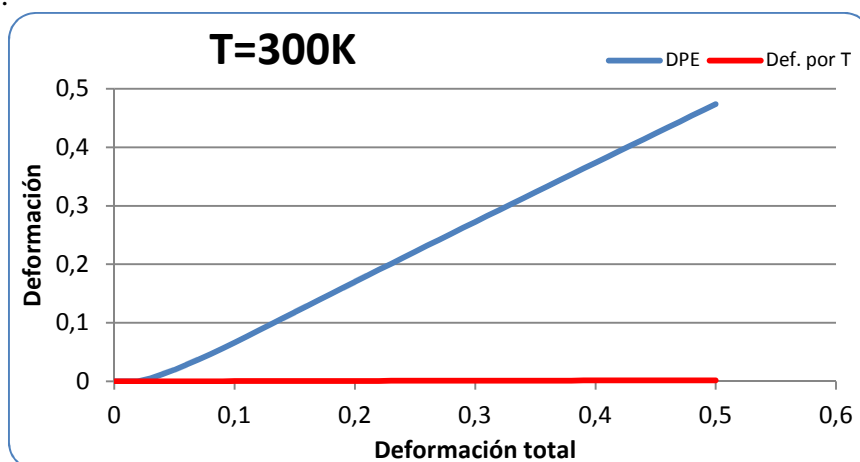


Figura 9.35 Comparativa entre deformación plástica equivalente y deformación por  $T$ .

Siendo DPE en la gráfica la deformación plástica equivalente.

Se puede apreciar que prácticamente la totalidad de la deformación es de la deformación plástica equivalente, esto es debido a que el coeficiente de dilatación del material es un valor tan pequeño y la probeta se calienta en pocos grados, por lo que según la ecuación:

$$\Delta \varepsilon^{\theta} = \alpha \cdot \Delta T$$

Los valores de deformación por  $T$  deben ser muy pequeños con respecto a la deformación que se produce en la plastificación del material.

En la siguiente gráfica hacemos un zoom sobre la curva de la deformación por  $T$ :

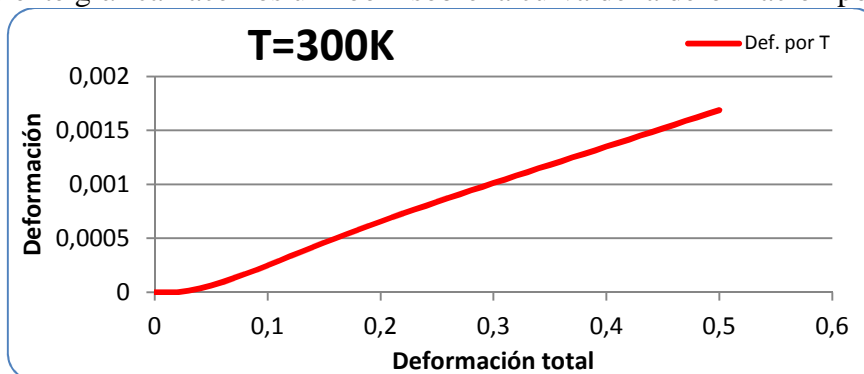


Figura 9.36 Deformación producida por la  $T$ .

Este mismo resultado se obtiene comprobando en otras simulaciones variando velocidades de deformación o temperatura inicial de ensayo. A continuación se presenta otro ejemplo comparativo a una temperatura de inicio mayor:

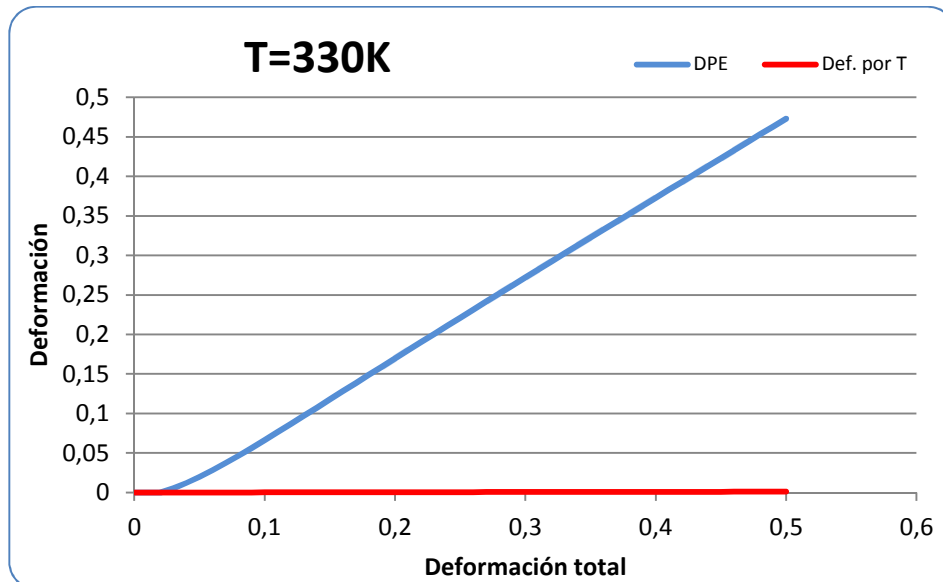


Figura 9.37 Comparativa entre deformación plástica equivalente y deformación por T.

### 9.2.2. Estudio de sensibilidad de $I_1$

En este apartado se van a presentar los resultados obtenidos en las simulaciones correspondientes a las definidas en el capítulo 8, en los cuales vamos a observar la influencia que tiene el invariante  $I_1$  sobre la plastificación del material.

La probeta se comportará de un modo prácticamente elástico en la mayor parte de su extensión a excepción de la entalla que se sitúa en el centro de la misma, donde se producirán la mayor concentración de tensiones y por tanto las mayores deformaciones de la probeta, en definitiva es la zona que tendrá un comportamiento más plástico. Es por ello que los resultados que se muestran en este apartado corresponden a la zona de la probeta donde se sitúa la entalla de la misma, además la simulación a través de Abaqus se lleva a cabo realizando particiones sobre la probeta, definiendo como elástica la mayor parte de la misma y estableciendo el modelo plástico de la subrutina únicamente en las zonas más cercanas a la entalla. Esto simplifica la resolución de los problemas acortando el tiempo de simulación.

Además se debe comprobar que la probeta plastifica, esto se lleva a cabo mediante el dato de la deformación plástica equivalente, que también será mayor en la zona de la entalla de la probeta.

A continuación se presenta una imagen de la zona de la entalla de la probeta tras una simulación. Lo que se observa es el valor de la deformación plástica equivalente, las zonas grises reflejan las zonas que se consideran con un comportamiento elástico, como se ha comentado anteriormente:

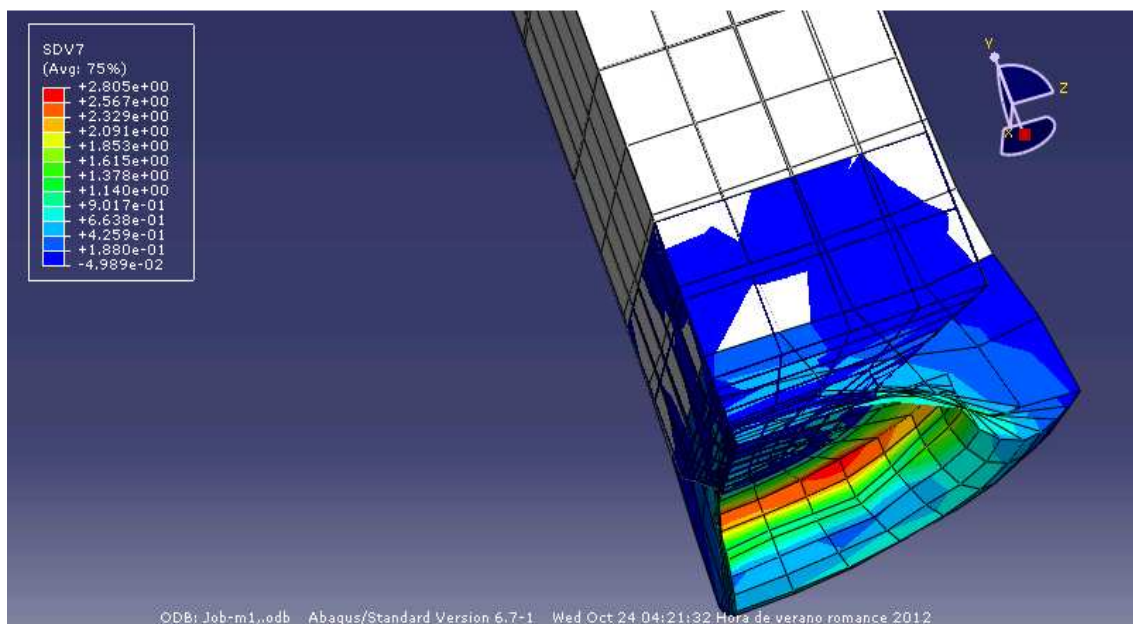


Figura 9.38 Deformación plástica equivalente en una simulación de una probeta cilíndrica con entalla de  $r=254\text{mm}$ .

En cuanto al estudio del comportamiento del material en este tipo de probetas, primero se presentan una serie de curvas fuerza-desplazamiento obtenidas a partir de varias velocidades de deformación y varias temperaturas, para así observar el comportamiento del material en este tipo de ensayos con una probeta con entalla:

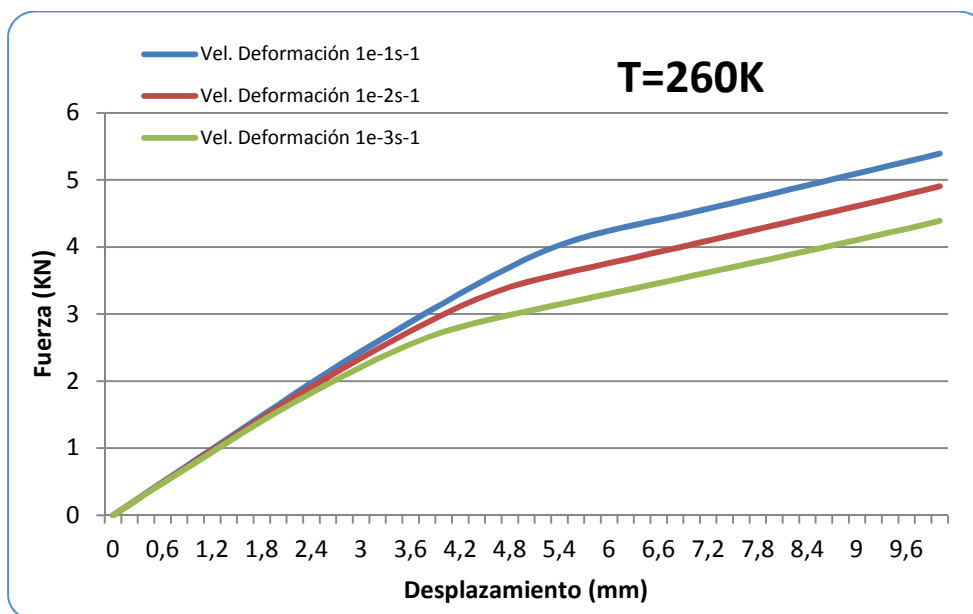


Figura 9.39 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$  a  $T=260\text{K}$ .

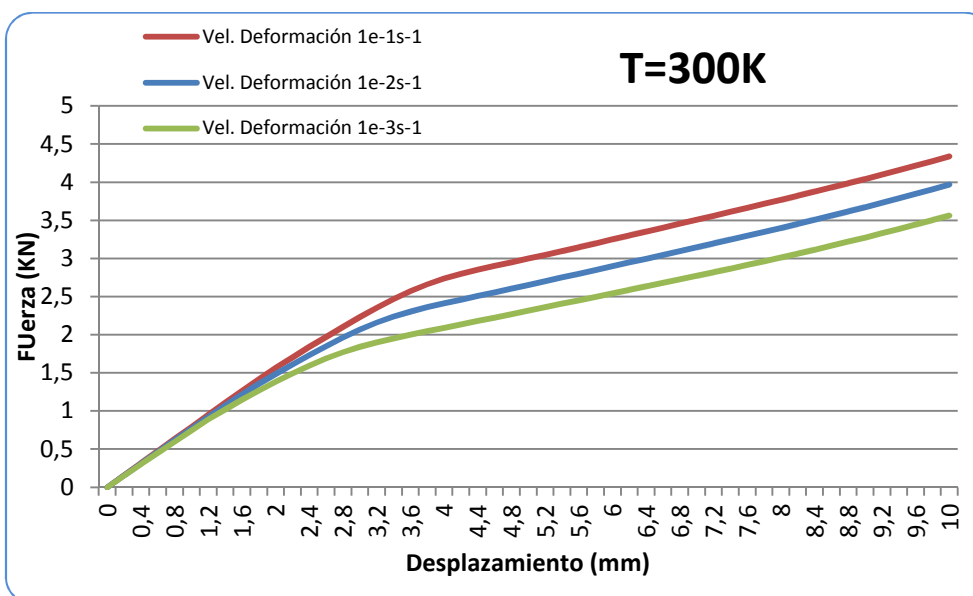


Figura 9.40 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$  a  $T=300\text{K}$ .



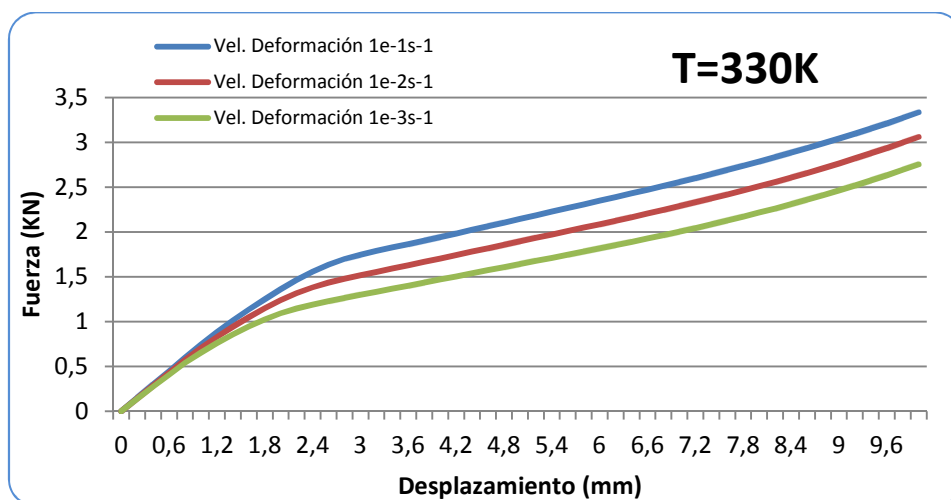


Figura 9.41 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127mm$  a  $T=330K$ .

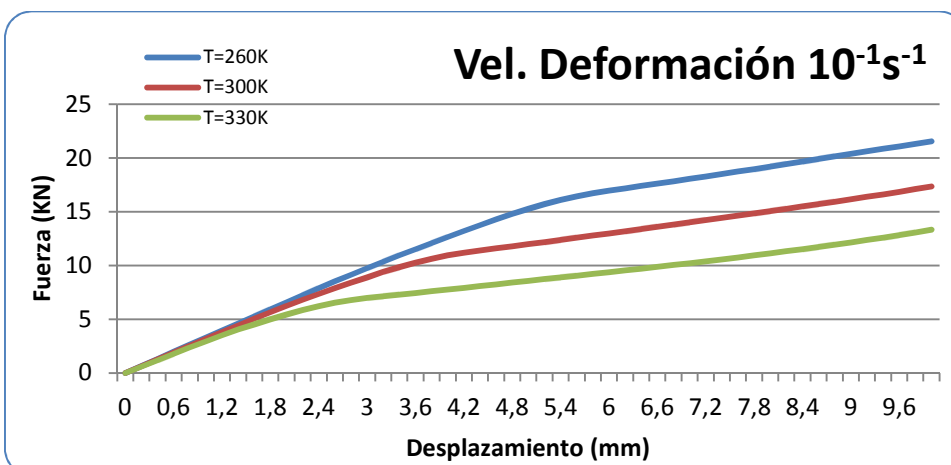


Figura 9.42 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127mm$  a velocidad de deformación  $10^{-1}s^{-1}$ .

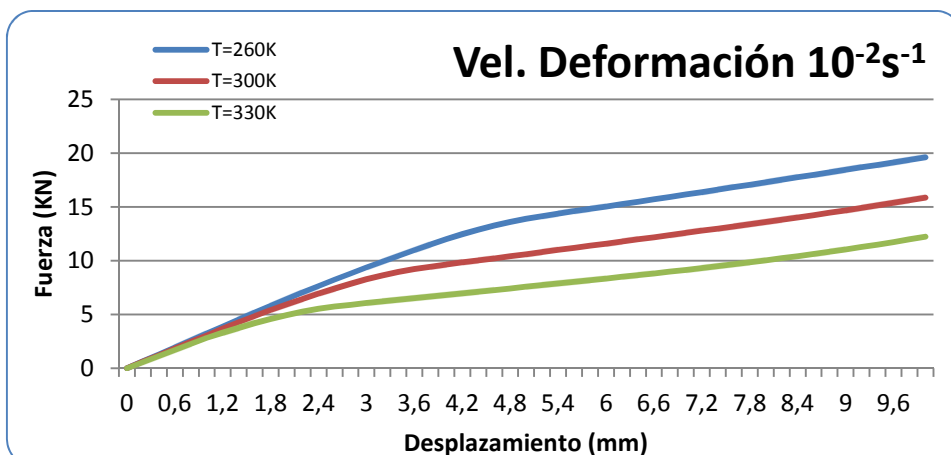


Figura 9.43 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127mm$  a velocidad de deformación  $10^{-2}s^{-1}$ .

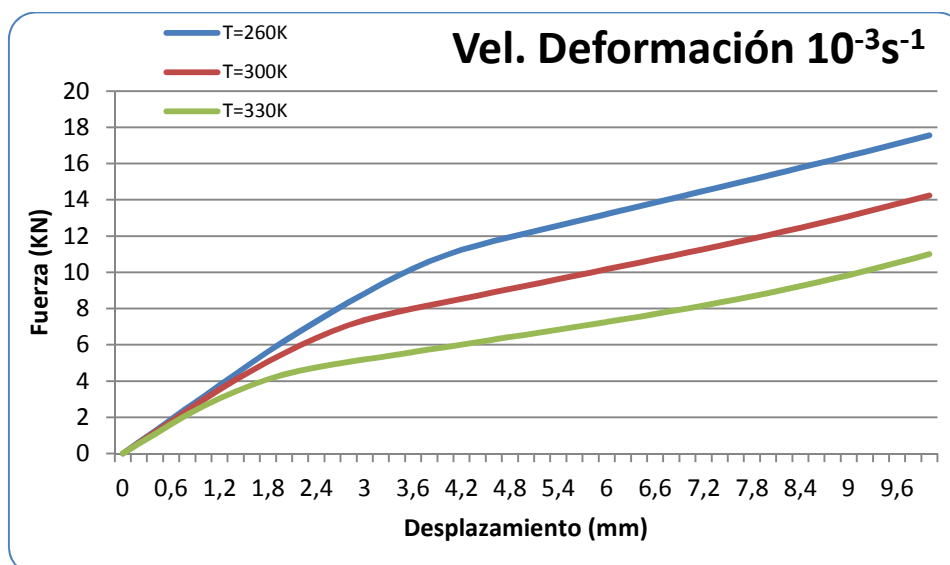


Figura 9.44 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$  a velocidad de deformación  $10^{-3}s^{-1}$ .

Se observa en las gráficas anteriores el mismo comportamiento del PMMA que en los casos anteriores, es decir, al aumentar la temperatura la reacción que sufre el material según avanza el desplazamiento disminuye, al igual que ocurriría con la tensión sobre el material al aumentar la temperatura, sigue por tanto las directrices del modelos constitutivo empleado. Exactamente lo mismo con la velocidad de deformación, que en estos casos, al igual que en los anteriores, al aumentar ésta, aumenta también la reacción que se produce sobre la entalla de la probeta.

En los siguientes cálculos vamos a pasar ya sí a estudiar la influencia del  $I_1$  en el comportamiento plástico del material por el estudio de las variables “m” y “n”, descritas en el apartado 8.2.

A continuación se presentan las curvas de fuerza-desplazamiento obtenidas en simulaciones con las condiciones definidas en el comienzo de este capítulo 9.2 variando únicamente el parámetro “m” que se incluye en la expresión de plastificación estudiada. Recordemos “m” como el cociente de la tensión de compresión entre la tensión de tracción, por lo que mayor será la diferencia entre ellas cuanto mayor sea “m”:

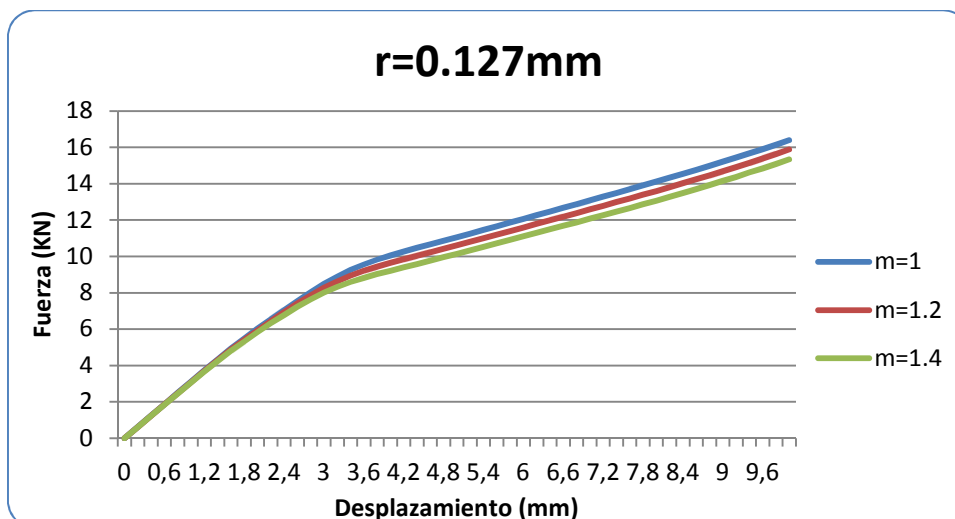


Figura 9.45 Resultados de carga-desplazamiento para probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$ .

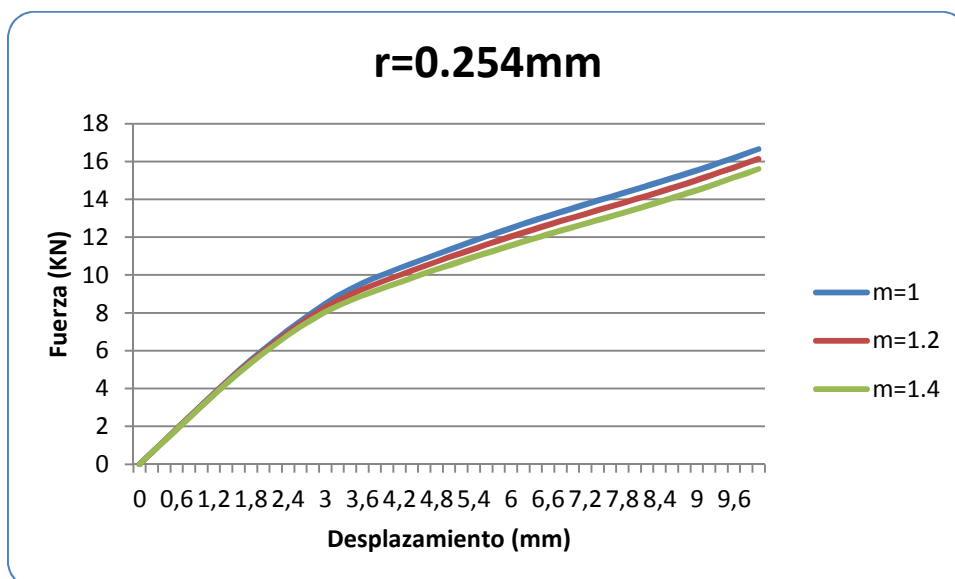


Figura 9.46 Resultados de carga-desplazamiento para probeta con entalla de  $r=0.254\text{mm}$ .

En este apartado se incluye el resultado en el que “m” es igual a 1 correspondiente al ejemplo en el que el criterio de plastificación es el de Von Mises, por tanto en el que el invariante  $I_1$  no influye. Los resultados siguen una pauta correcta debido a que según aumentamos la “m” disminuye la fuerza necesaria para realizar el desplazamiento en la probeta, esto coincide con resultados desarrollado en otros materiales como el acero que siguen la misma pauta aunque con valores diferentes [13].

A continuación se presentan las curvas de fuerza-desplazamiento obtenidas en simulaciones con las mismas características mencionadas, pero en este caso el parámetro que se varía es el exponente “n” que está relacionado directamente también con la influencia del invariante  $I_1$ :

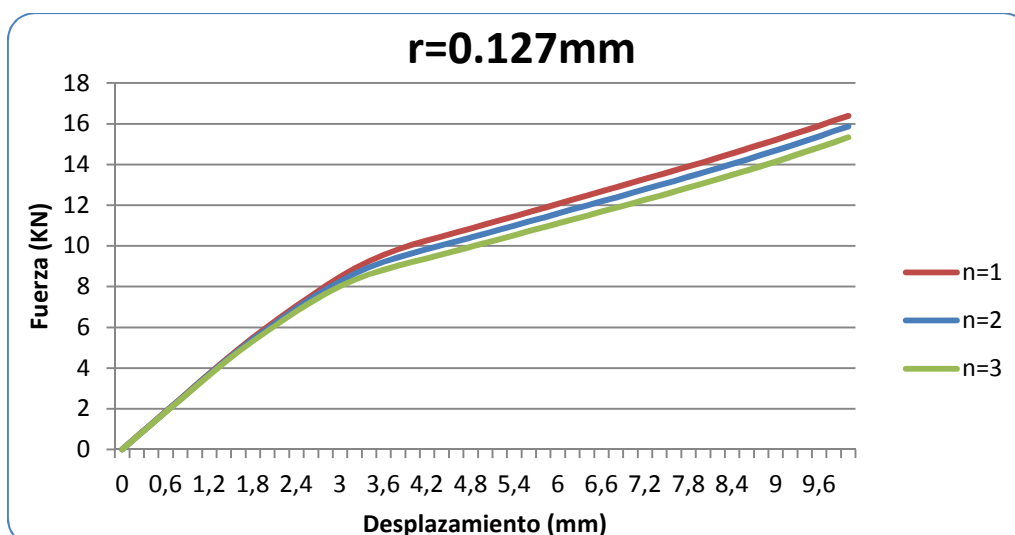


Figura 9.47 Resultados de carga-desplazamiento para probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$ .

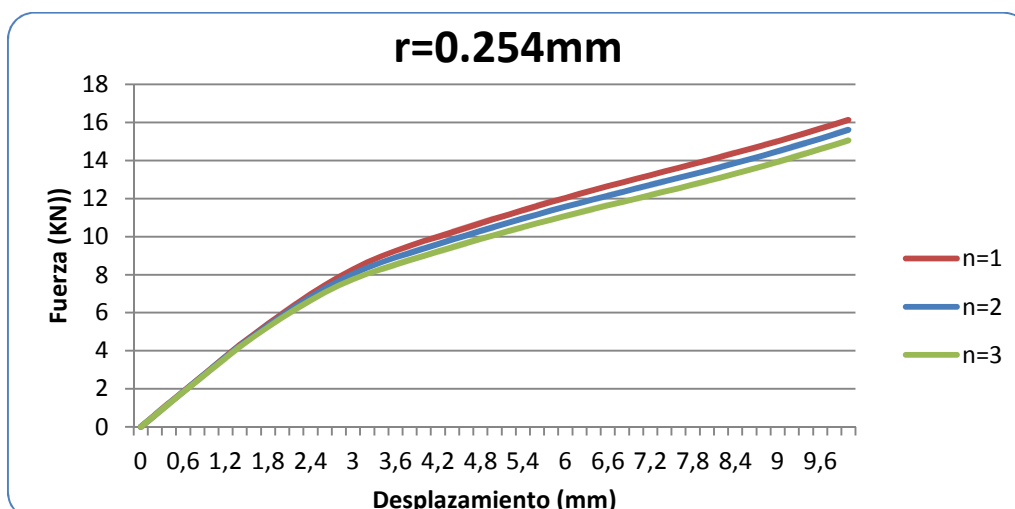


Figura 9.48 Resultados de carga-desplazamiento para probeta con entalla de  $r=0.127\text{mm}$ .

Estos casos presentan la influencia del parámetro “n” en la fórmula del apartado 6.2.1, en la que se puede concluir que los términos relacionados con esta “n” son los siguientes:

$$\left(\sigma_{eq}/\sigma_t\right)^n \sim \left(\frac{I_1}{\sigma_t}\right)$$

Así pues para compensar el efecto que tiene el parámetro “n” sobre la tensión equivalente, el invariante  $I_1$  incide directamente sobre el comportamiento del material y se puede decir que la tensión hidrostática influye en el comportamiento del material, por ser el invariante  $I_1$  tres veces esta tensión, como se explica en el capítulo 6.

### 9.2.3. Estudio de sensibilidad de $J_3$

En este apartado se incluyen los resultados obtenidos en las simulaciones con las probetas mencionadas en el apartado 8.3 y en las cuales se estudia la influencia en el criterio de plastificación estudiado del invariante  $J_3$ . La inclusión de este invariante va relacionada con el término  $\Psi$  que será el que variaremos en las condiciones de ensayo estándar mencionadas anteriormente.

$\Psi = 1$	No influye el invariante $J_3$
$\Psi = \frac{8}{7} \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{27}{4} \frac{J_3^2}{J_2^3} \right) \right)$	Sí que influye el invariante $J_3$

Al igual que en el apartado anterior, la probeta se comportará de un modo prácticamente elástico en la mayor parte de su extensión a excepción de la entalla que se sitúa en el centro de la misma, donde se producirán la mayor concentración de tensiones y por tanto las mayores deformaciones de la probeta, en definitiva es la zona que tendrá un comportamiento más plástico. Es por ello que los resultados que se muestran en este apartado corresponden a la zona de la probeta donde se sitúa la entalla de la misma. Y al igual que en el apartado anterior se llevan a cabo particiones en la probeta para definir los extremos con comportamiento elástico, y las zonas cercanas a la entalla con el modelo constitutivo del material desarrollado en la subrutina.

Para considerar válidas las simulaciones es necesario comprobar que la probeta plastifica, en este caso, se da en la zona de la entalla como ocurría en la probeta cilíndrica. A continuación se presenta una imagen de una de las simulaciones con la distribución de la deformación plástica equivalente en la probeta.

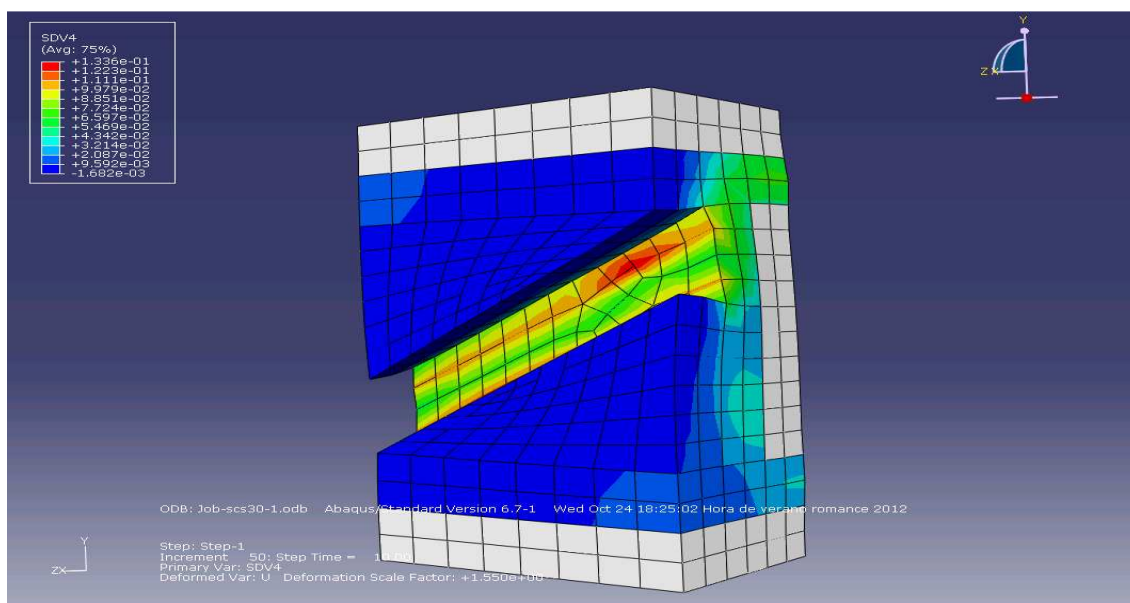


Figura 9.49 Deformación plástica equivalente en una simulación de una probeta con una entalla con un ángulo de 30°.

Como se puede apreciar, la mayor deformación plástica se concentra en la parte que está situada la entalla, así como ocurrirá con la mayor concentración de tensiones, cuya imagen es muy semejante a la mostrada.

Antes de analizar la influencia del  $J_3$  sobre el valor de la fuerza, hay que ver cómo afecta la velocidad de deformación y la temperatura a la probeta que se utiliza en este apartado:

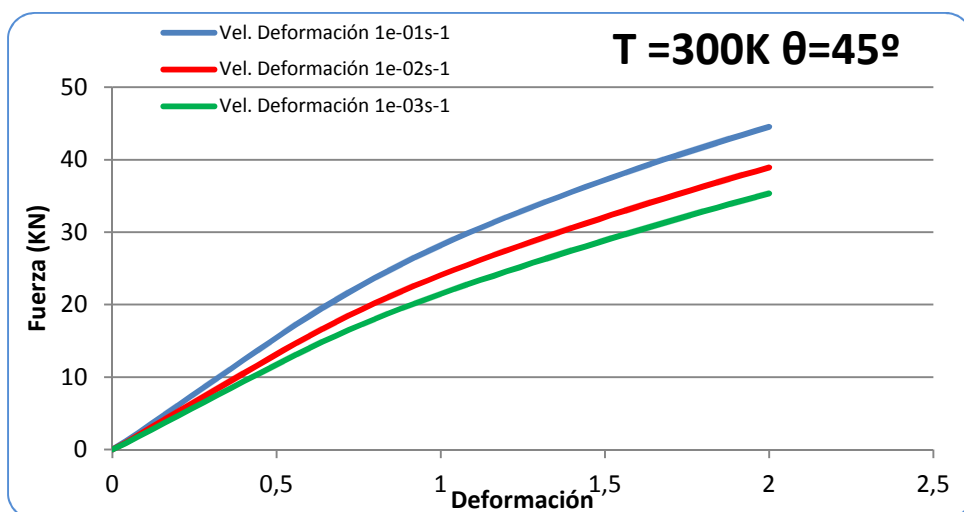


Figura 9.50 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $45^\circ$  a  $T=300K$ .

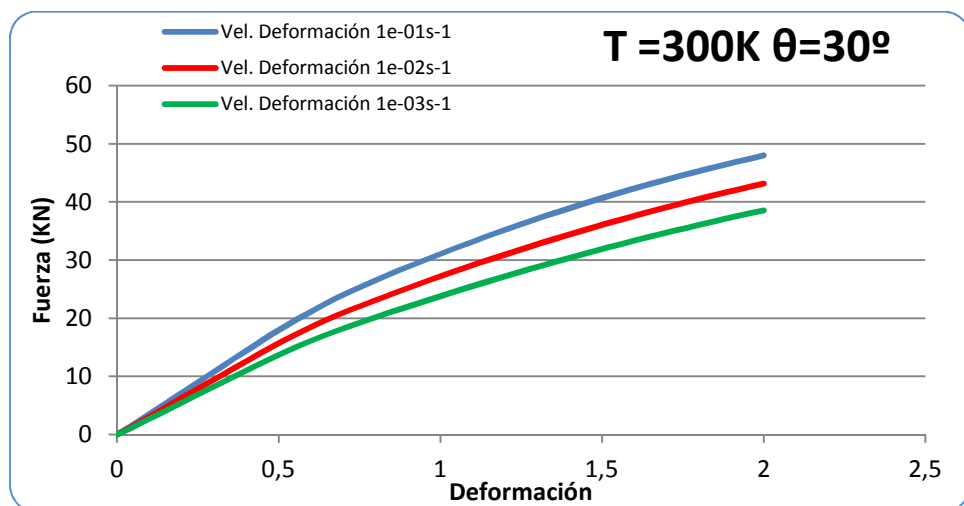


Figura 9.51 Resultados obtenidos en la probeta con entalla de  $30^\circ$  a  $T=300K$

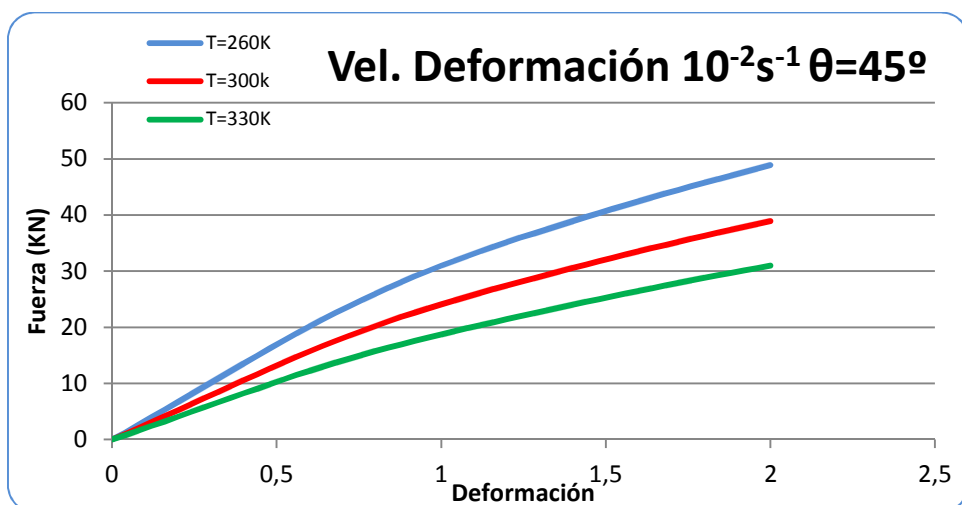


Figura 9.52 Resultados obtenidos en probeta con entalla de  $45^\circ$  a velocidad de deformación de  $10^{-1}s^{-1}$ .

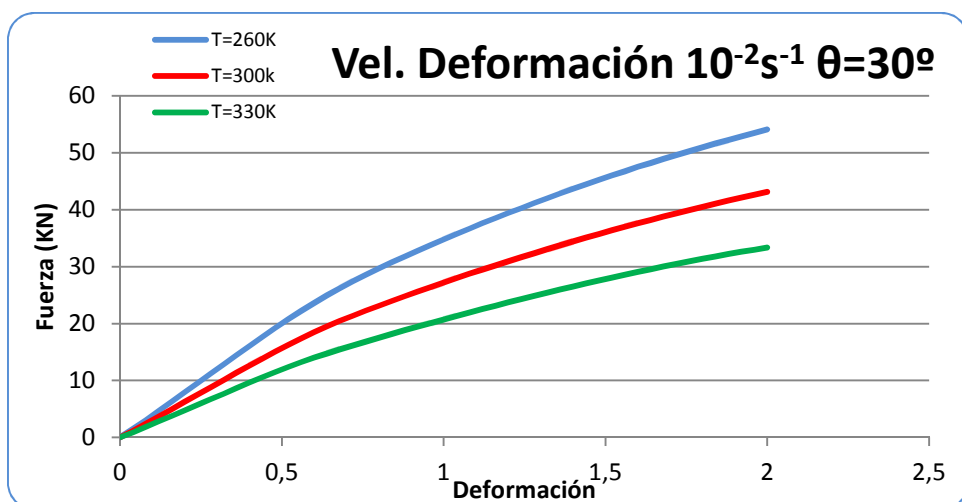


Figura 9.53 Resultados obtenidos en probeta con entalla de  $30^\circ$  a velocidad de deformación de  $10^{-1}s^{-1}$ .

Como se observa, igual que en los casos anteriores, el material, PMMA, se comporta del modo que se presupone según el modelo constitutivo establecido y así aumenta la fuerza necesaria para realizar el desplazamiento de la probeta, al igual que por tanto la tensión que sufre la probeta, según aumenta la velocidad de deformación o disminuye la temperatura inicial del ensayo.



Además es interesante visualizar la diferencia que existe para las mismas condiciones de simulación en las dos probetas:

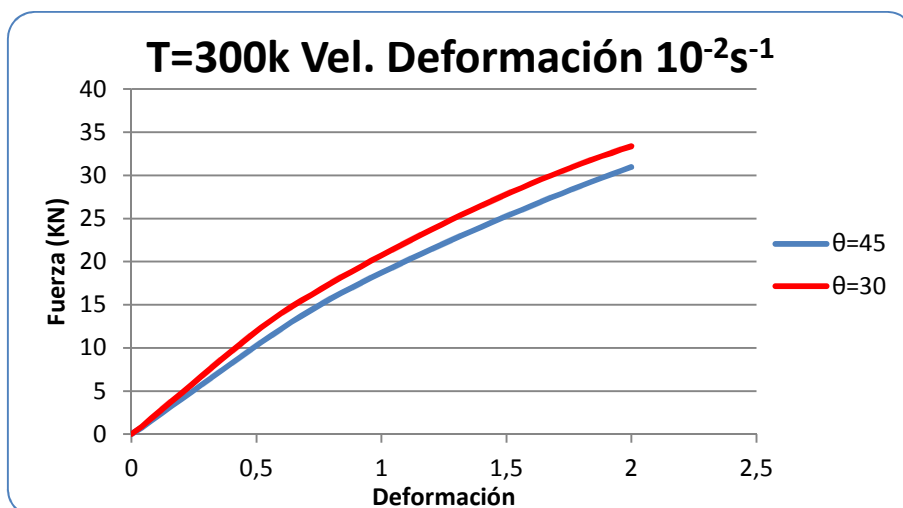


Figura 9. 54 Resultados obtenidos con  $T=300K$  y velocidad de deformación  $10^{-2}s^{-1}$ .

A continuación se presentan las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en las simulaciones de cada una de las probetas en función de si influye o no  $J_3$ :

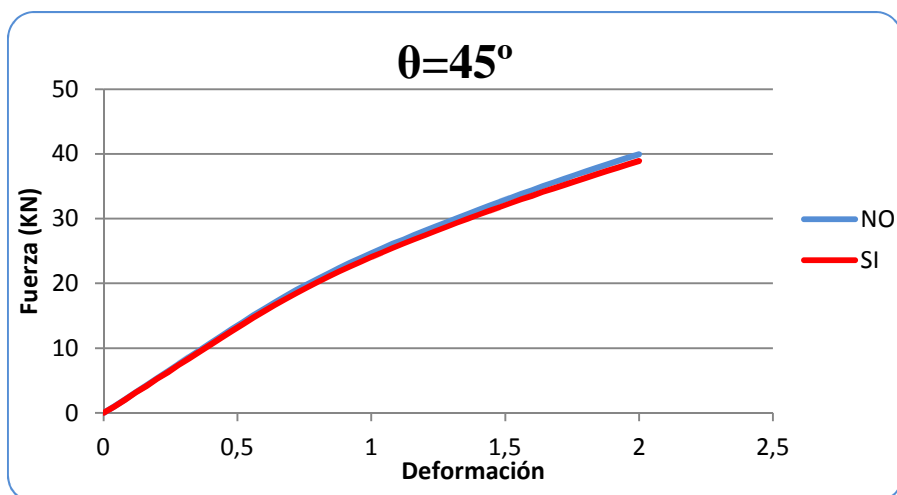


Figura 9.55 Resultados carga-desplazamiento de probeta con entalla  $45^\circ$ .

Se puede apreciar, que al ser  $\Psi$  un valor que oscila entre 1 para el caso que no influye el invariante  $J_3$  y 1,14 en el caso que sí que influye, existe una pequeña variación en el valor de la fuerza resultante que aparece en la base de la probeta.

Aún y con eso, si se realiza un zoom sobre la gráfica obtenida, se aprecia, que a medida que el desplazamiento aplicado sobre la probeta es mayor, ambas curvas se van separando y se obtienen valores algo más diferenciados:

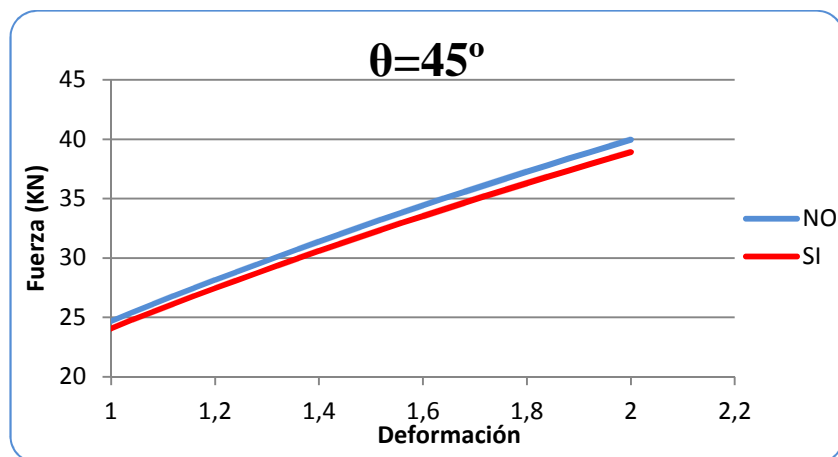


Figura 9.56 Zoom en curva carga-desplazamiento para entalla de  $45^\circ$ .

Ocurre de manera análoga con la otra probeta ensayada, si bien, observamos que al tratarse de una probeta con un ángulo de entalla de  $30^\circ$ , menor que la anterior, esta diferencia entre las curvas será todavía menor. Esto es así porque, tal y como se explica anteriormente, para que aparezca el  $J_3$  es necesario una entalla inclinada y no horizontal. Por eso existe mayor diferencia entre las curvas obtenidas para un ángulo de entalla de  $45^\circ$  que para uno de  $30^\circ$ :

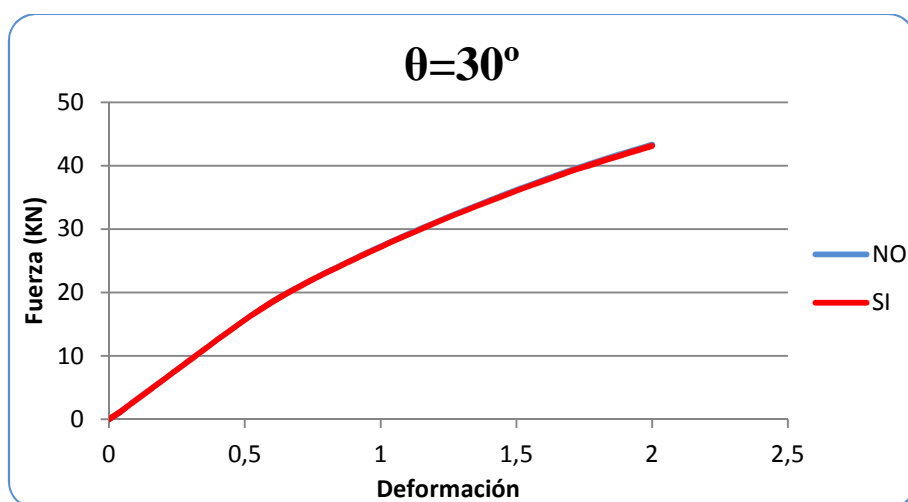


Figura 9.57 Resultados carga-desplazamiento de probeta con entalla  $30^\circ$ .

Realizando un zoom sobre la anterior gráfica se obtiene:

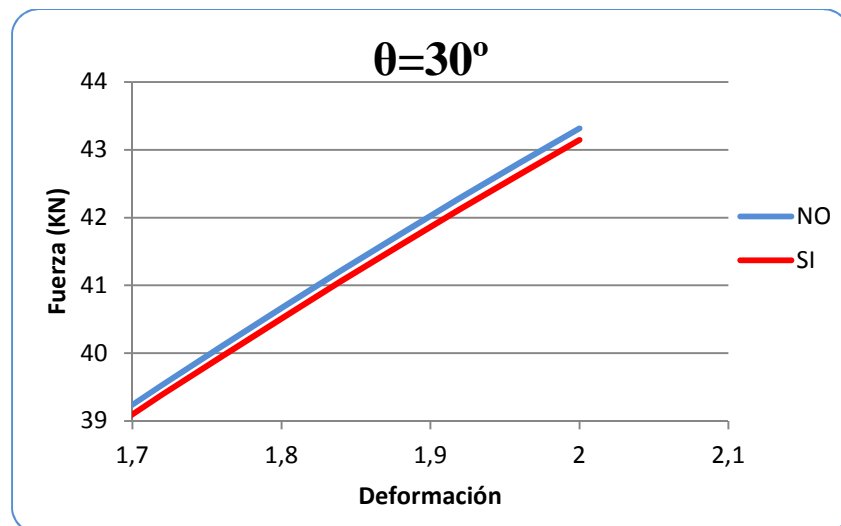


Figura 9.58 Zoom en curva carga-desplazamiento para entalla de  $30^\circ$ .



## CAPÍTULO 10

---

### CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

## **10.1. CONCLUSIONES**

---

El objetivo principal del presente proyecto ha sido el estudio del comportamiento termoelastoplástico del PMMA empleando el método de los elementos finitos con el software comercial Abaqus. La finalidad del mismo es el avance en el conocimiento del comportamiento de este material en distintas situaciones.

Se han desarrollado diferentes simulaciones para el estudio de este comportamiento utilizando diferentes criterios de plastificación, como son el propio criterio de Von Mises y otros de mayor actualidad como son la inclusión en el comportamiento de los invariantes  $I_1$  y  $J_3$ .

El proyecto se ha desarrollado con Abaqus, utilizando para su utilización en los nuevos criterios de plastificación la inclusión de una subrutina para el módulo de propiedades del material ("*property*"). En ella se ha incluido un modelo constitutivo del PMMA estudiado en la literatura.

En el presente documento se incluyen por tanto 83 simulaciones con las diferentes probetas y con los distintos criterios de plastificación.

En la primera parte del trabajo se llevan a cabo simulaciones numéricas con la herramienta a fin de corroborar la utilidad de la misma para el desarrollo del trabajo, y utilizando el criterio de Von Mises se obtienen resultados muy parejos a los que se obtienen de manera analítica con el modelo constitutivo que se va a utilizar en la subrutina, lo que denota gran afinidad por parte de la herramienta para simulaciones posteriores.

Como ya era sabido de la literatura de este proyecto, el PMMA recibe gran influencia de la temperatura inicial de ensayo y de la velocidad de deformación del ensayo, y se llevan varios ensayos con la subrutina ya desarrollada del problema, incluyendo el modelo constitutivo del material y el nuevo criterio de plastificación a utilizar. Los resultados obtenidos de estos ensayos son esclarecedores y nos ofrecen una correcta visión del comportamiento del material para las diferentes condiciones de temperatura y velocidad de deformación.

Una vez esclarecida la aplicabilidad del modelo a utilizar se llevan a cabo simulaciones para ver el efecto que tienen otros parámetros del problema sobre el comportamiento del material, como son el coeficiente de dilatación del material o el coeficiente de Taylor-Quinney. Los resultados que estos arrojan son que debido al poco calentamiento que sufre la probeta, la deformación que sobre la probeta se ejerce por este motivo es pequeña en comparación con la deformación plástica equivalente.



Por último se llevan a cabo simulaciones sobre unas probetas con unas geometrías específicas para estudiar la influencia que sobre el nuevo criterio de plastificación ejercen el invariante del tensor de tensiones  $I_1$  y el invariante del tensor desviador  $J_3$ . Por los resultados acaecidos se puede definir que además de la influencia del invariante del tensor desviador  $J_2$  conocido del criterio de Von Mises, los dos anteriormente mencionados también provocan diferencias en el comportamiento del material.

El invariante del tensor de tensiones  $I_1$  se observa que ejerce una gran influencia en el comportamiento del material en ensayos en los que tenemos un foco concentrador de tensiones y por estar este directamente relacionado con la tensión hidrostática del material, se puede concluir que la tensión hidrostática influye en el comportamiento del PMMA.

Por otro lado, el tensor desviador  $J_3$  se observa que su influencia sobre el comportamiento del material, aunque la tiene, es menor y produce pequeñas diferencias en los resultados obtenidos.

Todos los resultados que aparecen en este proyecto han sido cotejados con estudios de gran prestigio en el campo, llegando a la conclusión que son afines entre sí. Lo que dota de viabilidad a la utilidad del método de los elementos finitos, en este caso representados en Abaqus, para el desarrollo de este tipo de estudio. Lo que es de gran importancia, pues sustituye en gran medida al desarrollo de innumerables ensayos prácticos en el laboratorio, ahorrando tiempos de trabajo, costes y por tanto esto se traduce en una mayor eficiencia de trabajo.

Finalmente, a modo de resumen, cabe decir que se han alcanzado, a plena satisfacción, los objetivos planteados al comienzo del presente proyecto.



## **10.2. PROPUESTAS DE MEJORA Y TRABAJOS FUTUROS**

---

El estudio del comportamiento de materiales está siendo objeto de numerosos estudios, y en especial el comportamiento de los polímeros como es el PMMA en el caso de este documento.

Como sucede en todo estudio, este puede ser objeto de mejora y de ampliación de estudio con un número superior de ensayos o cambios en la tipología de los mismos, por lo que a continuación se proponen una serie de posibilidades a la continuación de este estudio.

- En primer lugar se pueden ampliar los ensayos realizados con el modelo constitutivo del material a estados dinámicos, es decir con altas velocidades de deformación utilizando la herramienta Abaqus Explicit.
- Por otro lado se puede suponer como una “m” no constante, es decir, en vez de utilizar un modelo desarrollado para ensayos a compresión y a partir de ahí sacar la tensión a tracción, desarrollar un nuevo modelo a tracción con ensayos experimentales en el laboratorio, obteniendo así dos funciones diferentes para tracción y compresión y un valor de “m” que será el cociente entre ambas funciones.
- Otra posibilidad es realizar ensayos sobre más probetas con otras geometrías que ofrezcan diferentes esfuerzos y diferencias en las tensiones a las que están sometidas.
- Por último se puede profundizar más en el desarrollo de la malla, con una malla más fina, aunque se aumenta el tiempo de simulación, haciendo este más costoso, puede proporcionar mayor precisión en los resultados y observar diferencias en parámetros que antes no se observaban.



## CAPÍTULO 11

---

### BIBLIOGRAFÍA





## **11.1. LIBROS Y PUBLICACIONES**

---

- [1]. Callister W. D., *“Introducción a la Ciencia e Ingeniería de los Materiales”* Ed. Revesté (1995).
- [2]. Gómez F. J., *“Un criterio de rotura en sólidos entallados”* Tesis Doctoral, Departamento de Ciencias de Materiales, Universidad Politécnica de Madrid (1998).
- [3]. Lau C. K., *“Fractura del metacrilato”* Tesis Doctoral, Departamento de ciencia de Materiales, Universidad Politécnica de Madrid (1992).
- [4]. Wiley, *“Properties and behaviour of polymers”* (2011).
- [5]. Aguilera Vega Y., *“Influencia de la velocidad de deformación en la curva de ablandamiento del PMMA”*. Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid (2008).
- [6]. Hengyi Wu, Gang Ma, Yuanming Xia, *“Experimental study of tensile properties of PMMA at intermediate strain rate”*. Agosto2004.
- [7]. J. Richeton, S. Ahzi, K. S. Vecchio, F. C. Jiang, R. R. Adharapurapu, *“Influence of temperature and strain rate on the mechanical behaviour of three amorphous polymers: Characterization and modeling of compressive yield stress”*. Agosto2005.
- [8]. Barbero Pozuelo E., Zaera Pelo R., Navarro Ugena C., *“Apuntes de elasticidad y Resistencia de Materiales”* de la Universidad Carlos III de Madrid.
- [9]. M. Nasraoui, P. Forquin, L. Siad, A. Rusinek, *“Influence of strain rate, temperature and adiabatic heating on the mechanical behaviour of poly-methyl-methacrylate: Experimental and modelling analyses”*. Diciembre2011.
- [10]. ElhemGhorbel, *“A viscoplastic constitutive model for polymeric materials”*. Febrero2008.
- [11]. Ellis Harold Dill, *“Continuum mechanics: Elasticity, plasticity, viscoelasticity”*. CRC Press (2007).
- [12]. Vlado A. Lubarda, *“ElastoplasticityTheory”*. CRC Press (2002).
- [13]. G. Vadillo, J. Fernández-Sáez, R.B. Pecherski, *“Some applications of Burzynski yield condition in metal plasticity”*. Agosto 2010.



- [14]. M. Vural, A.Molinari, N.Bhattacharyya, *“Analysis of Slot Orientation in Shear-Compression Specimen (SCS)”*. Mayo 2010.
- [15]. MJ Anglada, LM Llanes, AM Mateo, MN Salán, *“Fractura de materiales”* Ediciones UPC (2002)
- [16]. G. Vadillo Martín, *“Modelos de fractura dúctil en condiciones estáticas y dinámicas”* Tesis Doctoral, Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid (2007).
- [17]. Khan, A., Farrokh, B., *“Thermo-mechanical response of nylon 101 under uniaxial and multi-axial loadings”*. (2006).
- [18]. Altenbach, H., Tushtev, K., 2001. *“A new static failure criterion for isotropic polymers”*. (2001).
- [19]. Wang, D.-A., Pan, J., *“A non-quadratic yield function for polymeric foams”*. (2006).



## **11.2. DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS**

---

- [A]. <http://www.tecnologiadelosplastico.blogspot.com> (última visita julio 2012)
- [B]. <http://www.makinolo.com/metacrilato> (última visita julio 2012)
- [C]. <http://www.textoscientíficos.com> (última visita septiembre 2012)
- [D]. <http://www.cecalc.ula.ve/documentación/tutoriales/abaqus> (última visita julio 2012)
- [E]. <http://www.materialesuismalaga.wikispaces.com/file/view/polimetilmetacrilato> (última visita julio 2012)
- [F]. <http://www.eis.uva.es/macromol/curso03-04/PMMA/PROPIEDADES.htm> (última visita julio 2012)
- [G]. <http://www.ual.es/~aposadas/FormulasTensiones> (última visita septiembre 2012)